

ANALIZA MATEMATYCZNA 1

semestr zimowy 2015

dr Damian Wiśniewski, KAIRR

Moje dane

- e-mail : dawi@matman.uwm.edu.pl
- www: <http://wmii.uwm.edu.pl/~kairr/dawi>
- godziny konsultacji : poniedziałki 9:45 - 10:30, 12:45 - 14:00

Moje dane

- e-mail : dawi@matman.uwm.edu.pl
- www: <http://wmii.uwm.edu.pl/~kairr/dawi>
- godziny konsultacji : poniedziałki 9:45 - 10:30, 12:45 - 14:00

Warunki zaliczenia ćwiczeń

Moje dane

- e-mail : dawi@matman.uwm.edu.pl
- www: <http://wmii.uwm.edu.pl/~kairr/dawi>
- godziny konsultacji : poniedziałki 9:45 - 10:30, 12:45 - 14:00

Warunki zaliczenia ćwiczeń

-
-
-
-
-
-
-

Moje dane

- e-mail : dawi@matman.uwm.edu.pl
- www: <http://wmii.uwm.edu.pl/> ~ kairr/dawi
- godziny konsultacji : poniedziałki 9:45 - 10:30, 12:45 - 14:00

Warunki zaliczenia ćwiczeń

- dozwolone są trzy nieobecności (usprawiedliwienia dotyczą czwartej i kolejnych)



Moje dane

- e-mail : dawi@matman.uwm.edu.pl
- www: <http://wmii.uwm.edu.pl/~kairr/dawi>
- godziny konsultacji : poniedziałki 9:45 - 10:30, 12:45 - 14:00

Warunki zaliczenia ćwiczeń

- dozwolone są trzy nieobecności (usprawiedliwienia dotyczą czwartej i kolejnych)
- dwa kolokwia w semestrze (K1, K2) z wagą 3 (na zajęciach)
-
-
-
-
-

Moje dane

- e-mail : dawi@matman.uwm.edu.pl
- www: <http://wmii.uwm.edu.pl/> ~ kairr/dawi
- godziny konsultacji : poniedziałki 9:45 - 10:30, 12:45 - 14:00

Warunki zaliczenia ćwiczeń

- dozwolone są trzy nieobecności (usprawiedliwienia dotyczą czwartej i kolejnych)
- dwa kolokwia w semestrze (K1, K2) z wagą 3 (na zajęciach)
- niezapowiedziane wejściówki z wagą 1 (nie ma możliwości poprawy)
-
-
-
-

Moje dane

- e-mail : dawi@matman.uwm.edu.pl
- www: <http://wmii.uwm.edu.pl/> ~ kairr/dawi
- godziny konsultacji : poniedziałki 9:45 - 10:30, 12:45 - 14:00

Warunki zaliczenia ćwiczeń

- dozwolone są trzy nieobecności (usprawiedliwienia dotyczą czwartej i kolejnych)
- dwa kolokwia w semestrze (K1, K2) z wagą 3 (na zajęciach)
- niezapowiedziane wejściówki z wagą 1 (nie ma możliwości poprawy)
- dwa terminy poprawkowe (poza zajęciami); pierwszy - PK1, drugi - PK1 lub PK2 (oceny są nadpisywane); student ma obowiązek poprawy oceny 2,0 z kolokwium
-
-
-

Moje dane

- e-mail : dawi@matman.uwm.edu.pl
- www: <http://wmii.uwm.edu.pl/> ~ kairr/dawi
- godziny konsultacji : poniedziałki 9:45 - 10:30, 12:45 - 14:00

Warunki zaliczenia ćwiczeń

- dozwolone są trzy nieobecności (usprawiedliwienia dotyczą czwartej i kolejnych)
- dwa kolokwia w semestrze (K1, K2) z wagą 3 (na zajęciach)
- niezapowiedziane wejściówki z wagą 1 (nie ma możliwości poprawy)
- dwa terminy poprawkowe (poza zajęciami); pierwszy - PK1, drugi - PK1 lub PK2 (oceny są nadpisywane); student ma obowiązek poprawy oceny 2,0 z kolokwium
- ocenianie kół i wejściówek:
 $[41\%, 51\%) = 2,5$, $[51\%, 61\%) = 3,0$, $[61\%, 71\%) = 3,5$,
 $[71\%, 81\%) = 4,0$, $[81\%, 91\%) = 4,5$, $[91\%, 100\%] = 5,0$

•

•

Moje dane

- e-mail : dawi@matman.uwm.edu.pl
- www: <http://wmii.uwm.edu.pl/~kairr/dawi>
- godziny konsultacji : poniedziałki 9:45 - 10:30, 12:45 - 14:00

Warunki zaliczenia ćwiczeń

- dozwolone są trzy nieobecności (usprawiedliwienia dotyczą czwartej i kolejnych)
- dwa kolokwia w semestrze (K1, K2) z wagą 3 (na zajęciach)
- niezapowiedziane wejściówki z wagą 1 (nie ma możliwości poprawy)
- dwa terminy poprawkowe (poza zajęciami); pierwszy - PK1, drugi - PK1 lub PK2 (oceny są nadpisywane); student ma obowiązek poprawy oceny 2,0 z kolokwium
- ocenianie kół i wejściówek:
 $[41\%, 51\%) = 2, 5$, $[51\%, 61\%) = 3, 0$, $[61\%, 71\%) = 3, 5$,
 $[71\%, 81\%) = 4, 0$, $[81\%, 91\%) = 4, 5$, $[91\%, 100\%) = 5, 0$
- ocena końcowa to średnia ważona ocen z K1 i K2 oraz wejściówek:
 $[2, 7 - 3, 3) = 3, 0$; $[3, 3 - 3, 7) = 3, 5$; $[3, 7 - 4, 3) = 4, 0$;
 $[4, 3 - 4, 7) = 4, 5$; $[4, 7 - 5, 0] = 5, 0$
-

Moje dane

- e-mail : dawi@matman.uwm.edu.pl
- www: <http://wmii.uwm.edu.pl/> ~ kairr/dawi
- godziny konsultacji : poniedziałki 9:45 - 10:30, 12:45 - 14:00

Warunki zaliczenia ćwiczeń

- dozwolone są trzy nieobecności (usprawiedliwienia dotyczą czwartej i kolejnych)
- dwa kolokwia w semestrze (K1, K2) z wagą 3 (na zajęciach)
- niezapowiedziane wejściówki z wagą 1 (nie ma możliwości poprawy)
- dwa terminy poprawkowe (poza zajęciami); pierwszy - PK1, drugi - PK1 lub PK2 (oceny są nadpisywane); student ma obowiązek poprawy oceny 2,0 z kolokwium
- ocenianie kół i wejściówek:
 $[41\%, 51\%) = 2,5$, $[51\%, 61\%) = 3,0$, $[61\%, 71\%) = 3,5$,
 $[71\%, 81\%) = 4,0$, $[81\%, 91\%) = 4,5$, $[91\%, 100\%] = 5,0$
- ocena końcowa to średnia ważona ocen z K1 i K2 oraz wejściówek:
 $[2,7 - 3,3) = 3,0$; $[3,3 - 3,7) = 3,5$; $[3,7 - 4,3) = 4,0$;
 $[4,3 - 4,7) = 4,5$; $[4,7 - 5,0] = 5,0$
- aktywność - może być dodatkowo nagrodzona przy wystawianiu pozytywnej oceny końcowej

Definicja

Zbiór $X \subset \mathbb{R}$ jest ograniczony z dołu, jeżeli

$$\exists m \in \mathbb{R} \forall x \in X \quad x \geq m.$$

Dowolną liczbę m spełniającą powyższy warunek nazywamy ograniczeniem z dołu zbioru X .

Definicja

Zbiór $X \subset \mathbb{R}$ jest ograniczony z dołu, jeżeli

$$\exists m \in \mathbb{R} \forall x \in X \quad x \geq m.$$

Dowolną liczbę m spełniającą powyższy warunek nazywamy ograniczeniem z dołu zbioru X .

Ćwiczenie. Zbadać, czy podane zbiory są ograniczone z dołu:

a) $A = \{2, 3, 4, \dots\};$

b) $B = \{2^p : p \in \mathbb{Z}\};$

c) $C = (-\infty; 3);$

d) $D = [0; +\infty) \setminus \mathbb{Q}.$

Definicja

Zbiór $X \subset \mathbb{R}$ jest ograniczony z dołu, jeżeli

$$\exists m \in \mathbb{R} \forall x \in X \quad x \geq m.$$

Dowolną liczbę m spełniającą powyższy warunek nazywamy ograniczeniem z dołu zbioru X .

Ćwiczenie. Zbadać, czy podane zbiory są ograniczone z dołu:

a) $A = \{2, 3, 4, \dots\};$

b) $B = \{2^p : p \in \mathbb{Z}\};$

c) $C = (-\infty; 3);$

d) $D = [0; +\infty) \setminus \mathbb{Q}.$

Ćwiczenie. Dokończyć definicję:

Definicja

Zbiór $X \subset \mathbb{R}$ jest ograniczony z góry, jeżeli

Definicja

Zbiór $X \subset \mathbb{R}$ jest ograniczony z dołu, jeżeli

$$\exists m \in \mathbb{R} \forall x \in X \quad x \geq m.$$

Dowolną liczbę m spełniającą powyższy warunek nazywamy ograniczeniem z dołu zbioru X .

Ćwiczenie. Zbadać, czy podane zbiory są ograniczone z dołu:

a) $A = \{2, 3, 4, \dots\};$

b) $B = \{2^p : p \in \mathbb{Z}\};$

c) $C = (-\infty; 3);$

d) $D = [0; +\infty) \setminus \mathbb{Q}.$

Ćwiczenie. Dokończyć definicję:

Definicja

Zbiór $X \subset \mathbb{R}$ jest ograniczony z góry, jeżeli

$$\exists M \in \mathbb{R} \forall x \in X \quad x \leq M.$$

Dowolną liczbę M spełniającą powyższy warunek nazywamy ograniczeniem z góry zbioru X .

Ćwiczenie. Zbadać, czy podane zbiory są ograniczone z góry:

a) $A = (-\infty; 0]$;

b) $B = \{x \in \mathbb{R} : \sin x \geq 0\}$;

c) $C = \{\sqrt[n]{5} : n \in \mathbb{N}\}$;

d) $D = \{\frac{1}{n} + n : n \in \mathbb{N}\}$.

Ćwiczenie. Zbadać, czy podane zbiory są ograniczone z góry:

a) $A = (-\infty; 0]$;

b) $B = \{x \in \mathbb{R} : \sin x \geq 0\}$;

c) $C = \{\sqrt[n]{5} : n \in \mathbb{N}\}$;

d) $D = \{\frac{1}{n} + n : n \in \mathbb{N}\}$.

Zbiór ograniczony z dołu i z góry nazywamy zbiorem ograniczonym.

Ćwiczenie. Zbadać, czy podane zbiory są ograniczone z góry:

a) $A = (-\infty; 0]$;

b) $B = \{x \in \mathbb{R} : \sin x \geq 0\}$;

c) $C = \{\sqrt[n]{5} : n \in \mathbb{N}\}$;

d) $D = \{\frac{1}{n} + n : n \in \mathbb{N}\}$.

Zbiór ograniczony z dołu i z góry nazywamy zbiorem ograniczonym.

Ćwiczenie. Zbadać, czy podane zbiory są ograniczone z dołu, z góry, są ograniczone:

a) $A = \{\sin p : p \in \mathbb{Z}\}$;

b) $B = \{x \in \mathbb{R} : x^7 - 15x^2 - 100 = 0\}$;

c) $C = \{x \in \mathbb{R} : \sin x < 0\}$;

d) $D = \{3 - |x| : x \in \mathbb{R}\}$;

e) $E = \{\frac{2n}{n+3} : n \in \mathbb{N}\}$;

f) $F = \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{N}, p < q\}$;

g) $G = \{x \in \mathbb{R} : \operatorname{tg} x = 7\}$;

h) $H = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 3x - 8 < 0\}$.

Definicja (element najmniejszy i największy)

Definicja (element najmniejszy i największy)

1. Liczba a jest najmniejszym elementem zbioru $X \subset \mathbb{R}$, co zapisujemy $a = \min X$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a \in X \text{ oraz } \forall_{x \in X} x \geq a.$$

Definicja (element najmniejszy i największy)

1. Liczba a jest najmniejszym elementem zbioru $X \subset \mathbb{R}$, co zapisujemy $a = \min X$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a \in X \text{ oraz } \forall_{x \in X} x \geq a.$$

2. Liczba b jest największym elementem zbioru $X \subset \mathbb{R}$, co zapisujemy $b = \max X$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$b \in X \text{ oraz } \forall_{x \in X} x \leq b.$$

Definicja (element najmniejszy i największy)

1. Liczba a jest najmniejszym elementem zbioru $X \subset \mathbb{R}$, co zapisujemy $a = \min X$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a \in X \text{ oraz } \forall_{x \in X} x \geq a.$$

2. Liczba b jest największym elementem zbioru $X \subset \mathbb{R}$, co zapisujemy $b = \max X$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$b \in X \text{ oraz } \forall_{x \in X} x \leq b.$$

Ćwiczenie. Czy podane poniżej zbiory mają elementy najmniejsze?

$$A = [0; 2); \quad B = \left\{ \frac{1}{2n-1} : n \in \mathbb{N} \right\}; \quad C = \left\{ \sin \frac{\pi}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}; \quad D = \mathbb{N}.$$

Definicja (element najmniejszy i największy)

1. Liczba a jest najmniejszym elementem zbioru $X \subset \mathbb{R}$, co zapisujemy $a = \min X$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a \in X \text{ oraz } \forall_{x \in X} x \geq a.$$

2. Liczba b jest największym elementem zbioru $X \subset \mathbb{R}$, co zapisujemy $b = \max X$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$b \in X \text{ oraz } \forall_{x \in X} x \leq b.$$

Ćwiczenie. Czy podane poniżej zbiory mają elementy najmniejsze?

$$A = [0; 2); \quad B = \left\{ \frac{1}{2n-1} : n \in \mathbb{N} \right\}; \quad C = \left\{ \sin \frac{\pi}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}; \quad D = \mathbb{N}.$$

Ćwiczenie. Czy podane poniżej zbiory mają elementy największe?

$$A = (0; 3) \cup \{5\}; \quad B = \left\{ \frac{4n}{n^2+1} : n \in \mathbb{N} \right\}; \quad C = \left\{ \frac{2n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Definicja (kresy zbiorów)

Definicja (kresy zbiorów)

1. Niech zbiór $X \subset \mathbb{R}$ będzie ograniczony z dołu. Liczba a jest kresem dolnym tego zbioru, co zapisujemy $a = \inf X$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{x \in X} x \geq a \text{ oraz } \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{x_0 \in X} x_0 < a + \varepsilon.$$

Definicja (kresy zbiorów)

1. Niech zbiór $X \subset \mathbb{R}$ będzie ograniczony z dołu. Liczba a jest kresem dolnym tego zbioru, co zapisujemy $a = \inf X$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{x \in X} x \geq a \text{ oraz } \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{x_0 \in X} x_0 < a + \varepsilon.$$

2. Niech zbiór $X \subset \mathbb{R}$ będzie ograniczony z góry. Liczba b jest kresem górnym tego zbioru, co zapisujemy $b = \sup X$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{x \in X} x \leq b \text{ oraz } \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{x_0 \in X} x_0 > b - \varepsilon.$$

Definicja (kresy zbiorów)

1. Niech zbiór $X \subset \mathbb{R}$ będzie ograniczony z dołu. Liczba a jest kresem dolnym tego zbioru, co zapisujemy $a = \inf X$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{x \in X} x \geq a \text{ oraz } \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{x_0 \in X} x_0 < a + \varepsilon.$$

2. Niech zbiór $X \subset \mathbb{R}$ będzie ograniczony z góry. Liczba b jest kresem górnym tego zbioru, co zapisujemy $b = \sup X$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{x \in X} x \leq b \text{ oraz } \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{x_0 \in X} x_0 > b - \varepsilon.$$

Jak zdefiniować (słownie) kres górny/dolny zbioru odnosząc się do pojęcia ograniczenia górnego/dolnego?

Definicja (kresy zbiorów)

1. Niech zbiór $X \subset \mathbb{R}$ będzie ograniczony z dołu. Liczba a jest kresem dolnym tego zbioru, co zapisujemy $a = \inf X$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{x \in X} x \geq a \text{ oraz } \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{x_0 \in X} x_0 < a + \varepsilon.$$

2. Niech zbiór $X \subset \mathbb{R}$ będzie ograniczony z góry. Liczba b jest kresem górnym tego zbioru, co zapisujemy $b = \sup X$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{x \in X} x \leq b \text{ oraz } \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{x_0 \in X} x_0 > b - \varepsilon.$$

Jak zdefiniować (słownie) kres górny/dolny zbioru odnosząc się do pojęcia ograniczenia górnego/dolnego?

Ćwiczenie. Znaleźć kresy dolne podanych zbiorów:

- a) $A = (-\sqrt{2}; \sqrt{5}]$; b) $B = \{2^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$; c) $C = (-\infty; 0] \setminus \mathbb{Q}$;
d) $D = \{-1\} \cup (0; 1]$.

Definicja (kresy zbiorów)

1. Niech zbiór $X \subset \mathbb{R}$ będzie ograniczony z dołu. Liczba a jest kresem dolnym tego zbioru, co zapisujemy $a = \inf X$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{x \in X} x \geq a \text{ oraz } \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{x_0 \in X} x_0 < a + \varepsilon.$$

2. Niech zbiór $X \subset \mathbb{R}$ będzie ograniczony z góry. Liczba b jest kresem górnym tego zbioru, co zapisujemy $b = \sup X$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{x \in X} x \leq b \text{ oraz } \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{x_0 \in X} x_0 > b - \varepsilon.$$

Jak zdefiniować (słownie) kres górny/dolny zbioru odnosząc się do pojęcia ograniczenia górnego/dolnego?

Ćwiczenie. Znaleźć kresy dolne podanych zbiorów:

- a) $A = (-\sqrt{2}; \sqrt{5}]$; b) $B = \{2^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$; c) $C = (-\infty; 0] \setminus \mathbb{Q}$;
d) $D = \{-1\} \cup (0; 1]$.

Ćwiczenie. Znaleźć kresy górne podanych zbiorów:

- a) $A = (-\infty; 0)$; b) $B = [\sqrt{2}; +\infty) \cap \mathbb{Q}$; c) $C = \left\{1 + \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

W domku (na stacji, w akademiku, na podwórku,...)

Zadanko nr 1. Niech będą dane następujące zbiory liczbowe :

- a) $A = (0; 1) \cap \mathbb{Q}$; b) $B = \{\frac{1}{x} : x \in (0; 1]\}$; c) $C = \{\frac{7}{10}, \frac{77}{100}, \frac{777}{1000}, \dots\}$;
d) $D = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 3\}$; e) $E = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5|x| + 4 \leq 0\}$.

Odpowiedzieć na poniższe pytania:

- 1 Czy podane zbiory są ograniczone z góry/dołu? Wskazać przykładowe ograniczenia.
- 2 Czy podane zbiory mają element największy/najmniejszy? Jeśli tak, to je wskazać.
- 3 Podać kresy dolne i górne tych zbiorów.

W domku (na stacji, w akademiku, na podwórku,...)

Zadanko nr 1. Niech będą dane następujące zbiory liczbowe :

- a) $A = (0; 1) \cap \mathbb{Q}$; b) $B = \{\frac{1}{x} : x \in (0; 1]\}$; c) $C = \{\frac{7}{10}, \frac{77}{100}, \frac{777}{1000}, \dots\}$;
d) $D = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 3\}$; e) $E = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5|x| + 4 \leq 0\}$.

Odpowiedzieć na poniższe pytania:

- 1 Czy podane zbiory są ograniczone z góry/dołu? Wskazać przykładowe ograniczenia.
- 2 Czy podane zbiory mają element największy/najmniejszy? Jeśli tak, to je wskazać.
- 3 Podać kresy dolne i górne tych zbiorów.

Zadanko nr 2. Poniżej podaję kilka zdań dotyczących poznanych pojęć. Wasze zadanie to stwierdzenie, czy dane zdanie jest prawdziwe (zdanie jest prawdziwe, jeśli jest zawsze poprawne), czy fałszywe oraz podanie przykładu na "tak"/"nie" (jeśli prawdziwe, to na "tak"; jeśli fałszywe, to na "nie"):

- 1 Ograniczenie danego zbioru należy do tego zbioru.
- 2 Element największy danego zbioru należy do tego zbioru.
- 3 Kres danego zbioru należy do tego zbioru.
- 4 Każdy niepusty zbiór ograniczony z góry posiada kres górny.
- 5 Jeśli liczba a jest kresem dolnym pewnego zbioru, to jest też jego elementem najmniejszym.

- 6 Największe z ograniczeń dolnych pewnego zbioru jest równocześnie jego kresem dolnym.
- 7 Kres górny nazywany jest również jako supremum.
- 8 Element najmniejszy danego zbioru to to samo co jego infimum.
- 9 Każdy zbiór ma kres dolny.
- 10 Kres górny danego zbioru jest zawsze mniejszy bądź równy od każdego z ograniczeń górnych tego zbioru.

Ciągi liczbowe

Niech $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ - zbiór liczb naturalnych.

Ciąg (nieskończony) to funkcja odwzorowująca zbiór liczb naturalnych w zbiór liczb rzeczywistych, tzn. funkcja postaci $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Wartości takiej funkcji dla kolejnych liczb naturalnych nazywa się wyrazami ciągu i oznacza $a_1, a_2, a_3, \dots$.

Ciągi możemy określać :

① przy pomocy wzorów ogólnych, np. $a_n = \frac{3-n}{n^2}$, $d_n = \sqrt{n+7}$

② rekurencyjnie:

- $$a_n = \begin{cases} 1, & \text{dla } n = 1 \\ 2a_{n-1}^2 + 3, & \text{dla } n > 1 \end{cases}$$

- ciąg Fibbonaciego :

1 1 2 3 5 8 13 21 ...

Jak go opisać rekurencyjnie?

Ciągi liczbowe

Niech $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ - zbiór liczb naturalnych.

Ciąg (nieskończony) to funkcja odwzorowująca zbiór liczb naturalnych w zbiór liczb rzeczywistych, tzn. funkcja postaci $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Wartości takiej funkcji dla kolejnych liczb naturalnych nazywa się wyrazami ciągu i oznacza $a_1, a_2, a_3, \dots$.

Ciągi możemy określać :

❶ przy pomocy wzorów ogólnych, np. $a_n = \frac{3-n}{n^2}$, $d_n = \sqrt{n+7}$

❷ rekurencyjnie:

- $a_n = \begin{cases} 1, & \text{dla } n = 1 \\ 2a_{n-1}^2 + 3, & \text{dla } n > 1 \end{cases}$

- ciąg Fibbonaciego :

1 1 2 3 5 8 13 21 ...

Jak go opisać rekurencyjnie?

Ciągi liczbowe

Niech $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ - zbiór liczb naturalnych.

Ciąg (nieskończony) to funkcja odwzorowująca zbiór liczb naturalnych w zbiór liczb rzeczywistych, tzn. funkcja postaci $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Wartości takiej funkcji dla kolejnych liczb naturalnych nazywa się wyrazami ciągu i oznacza $a_1, a_2, a_3, \dots$.

Ciągi możemy określać :

❶ przy pomocy wzorów ogólnych, np. $a_n = \frac{3-n}{n^2}$, $d_n = \sqrt{n+7}$

❷ rekurencyjnie:

- $a_n = \begin{cases} 1, & \text{dla } n = 1 \\ 2a_{n-1}^2 + 3, & \text{dla } n > 1 \end{cases}$
- ciąg Fibbonaciego :

1 1 2 3 5 8 13 21 ...

Jak go opisać rekurencyjnie?

❸ opisowo: (c_n) oznacza n -tą cyfrę po przecinku rozwinięcia dziesiętnego liczby $\sqrt{3}$.

Ciągi liczbowe

Niech $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ - zbiór liczb naturalnych.

Ciąg (nieskończony) to funkcja odwzorowująca zbiór liczb naturalnych w zbiór liczb rzeczywistych, tzn. funkcja postaci $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Wartości takiej funkcji dla kolejnych liczb naturalnych nazywa się wyrazami ciągu i oznacza $a_1, a_2, a_3, \dots$.

Ciągi możemy określać :

❶ przy pomocy wzorów ogólnych, np. $a_n = \frac{3-n}{n^2}$, $d_n = \sqrt{n+7}$

❷ rekurencyjnie:

- $a_n = \begin{cases} 1, & \text{dla } n = 1 \\ 2a_{n-1}^2 + 3, & \text{dla } n > 1 \end{cases}$
- ciąg Fibbonaciego :

1 1 2 3 5 8 13 21 ...

Jak go opisać rekurencyjnie?

❸ opisowo: (c_n) oznacza n -tą cyfrę po przecinku rozwinięcia dziesiętnego liczby $\sqrt{3}$.

Monotoniczność ciągu

Definicja

Ciąg (a_n) nazywamy :

- ❶ *rosnącym, jeśli $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$*
- ❷ *niemalejącym, jeśli $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$*
- ❸ *malejącym, jeśli $\forall n \in \mathbb{N} : a_n > a_{n+1}$*
- ❹ *nierosnącym, jeśli $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$*

Powyższe ciągi nazywamy monotonicznymi.

Monotoniczność ciągu

Definicja

Ciąg (a_n) nazywamy :

- ❶ rosnącym, jeśli $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$
- ❷ niemalejącym, jeśli $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$
- ❸ malejącym, jeśli $\forall n \in \mathbb{N} : a_n > a_{n+1}$
- ❹ nierosnącym, jeśli $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$

Powyższe ciągi nazywamy monotonicznymi.

Jak badać monotoniczność ciągu?

Monotoniczność ciągu

Definicja

Ciąg (a_n) nazywamy :

- 1 rosnącym, jeśli $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$
- 2 niemalejącym, jeśli $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$
- 3 malejącym, jeśli $\forall n \in \mathbb{N} : a_n > a_{n+1}$
- 4 nierosnącym, jeśli $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$

Powyższe ciągi nazywamy monotonicznymi.

Jak badać monotoniczność ciągu?

((b_n)-ciąg o wyrazach dodatnich!)

$a_{n+1} - a_n$	$\frac{b_{n+1}}{b_n}$	Ciąg
> 0	> 1	rosnący
< 0	< 1	malejący
≥ 0	≥ 1	niemalejący
≤ 0	≤ 1	nierosnący

Monotoniczność ciągu

Definicja

Ciąg (a_n) nazywamy :

- 1 rosnącym, jeśli $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$
- 2 niemalejącym, jeśli $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$
- 3 malejącym, jeśli $\forall n \in \mathbb{N} : a_n > a_{n+1}$
- 4 nierosnącym, jeśli $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$

Powyższe ciągi nazywamy monotonicznymi.

Jak badać monotoniczność ciągu?

$a_{n+1} - a_n$	$\frac{b_{n+1}}{b_n}$	Ciąg
> 0	> 1	rosnący
< 0	< 1	malejący
≥ 0	≥ 1	niemalejący
≤ 0	≤ 1	nierosnący

((b_n)-ciąg o wyrazach dodatnich!)

Zadanie 1. Zbadać monotoniczność poniższych ciągów :

a) $k_n = n^2 + 3n + 2$, b) $b_n = \frac{3n+5}{5n-4}$,

c) $a_n = \frac{n^2}{7n+4}$, d) $a_n = \frac{2^n}{n^2}$,

e) $c_n = \frac{n!}{n^n}$, f) $a_n = \frac{n^2+1}{n!}$,

g) $a_n = \sqrt{n^2 + 4n - n}$, h) $d_n = \sin \frac{\pi}{2n}$,

i) $c_n = \frac{n!(2n)!}{(3n)!}$, j) $b_n = \frac{7^n}{n!}$,

k) $f_n = n^{100} - n^{50} + 1$, l) $b_n = 2 \cdot 3^n$

Ciągi ograniczone

Definicja

Ciąg (a_n) nazywamy ograniczonym, jeśli

$$\exists m, M \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : m \leq a_n \leq M.$$

Ciąg, dla którego spełniona jest nierówność $a_n \geq m$ nazywamy ograniczonym z dołu, zaś taki, dla którego zachodzi $a_n \leq M$ - ograniczonym z góry (czyli : ciąg ograniczony z góry i ograniczony z dołu jest ograniczony).

Ciągi ograniczone

Definicja

Ciąg (a_n) nazywamy ograniczonym, jeśli

$$\exists m, M \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : m \leq a_n \leq M.$$

Ciąg, dla którego spełniona jest nierówność $a_n \geq m$ nazywamy ograniczonym z dołu, zaś taki, dla którego zachodzi $a_n \leq M$ - ograniczonym z góry (czyli : ciąg ograniczony z góry i ograniczony z dołu jest ograniczony).

Zadanie 2.

Stwierdzić, czy podane poniżej ciągi są ograniczone z dołu, z góry, są ograniczone:

- a) $a_n = \frac{n}{n^2+1}$, b) $b_n = 4 - 3 \cos n$, c) $c_n = 2^n$ d) $d_n = 10n - n^2$,
e) $e_n = 3^{-n}$, f) $f_n = \frac{2^n}{n!}$ g) $g_n = \frac{3^n}{3^n+2}$, h) $h_n = \sqrt{n+6} - \sqrt{n+2}$.

Granica ciągu liczbowego

Definicja

Ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy właściwej $g \in \mathbb{R}$, co zapisujemy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_\varepsilon \mid a_n - g \mid < \varepsilon.$$

Powyższą definicję rozumiemy następująco : dla dowolnie małej dodatniej liczby ε można wskazać taką liczbę n_ε , odpowiednio dobraną do ε , że wszystkie wyrazy ciągu (a_n) o numerach większych niż n_ε będą różnić się od liczby g (=granicy ciągu) o mniej niż ε .

Zadanie 1. Na podstawie powyższej definicji pokazać, że :

- granicą ciągów: $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{2+(-1)^n}{n}$, $c_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$ jest liczba 0
- granicą ciągu $a_n = \frac{3}{n+2}$ jest liczba 0
- granicą ciągu $a_n = \frac{n+1}{n+11}$ jest liczba 1
- granicą ciągu $a_n = \frac{3-8n}{5n+4}$ jest liczba $-\frac{8}{5}$
- granicą ciągu $a_n = \frac{5}{\sqrt{5n+7}}$ jest liczba 0
- granicą ciągu $a_n = \frac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4}$ jest liczba $\frac{1}{3}$
- granicą ciągu $a_n = (-1)^n$ nie istnieje

Granica ciągu liczbowego

Definicja

Ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy właściwej $g \in \mathbb{R}$, co zapisujemy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_\varepsilon \mid a_n - g \mid < \varepsilon.$$

Powyższą definicję rozumiemy następująco : dla dowolnie małej dodatniej liczby ε można wskazać taką liczbę n_ε , odpowiednio dobraną do ε , że wszystkie wyrazy ciągu (a_n) o numerach większych niż n_ε będą różnić się od liczby g (=granicy ciągu) o mniej niż ε .

Zadanie 1. Na podstawie powyższej definicji pokazać, że :

- granicą ciągów: $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{2+(-1)^n}{n}$, $c_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$ jest liczba 0
- granicą ciągu $a_n = \frac{3}{n+2}$ jest liczba 0
- granicą ciągu $a_n = \frac{n+1}{n+11}$ jest liczba 1
- granicą ciągu $a_n = \frac{3-8n}{5n+4}$ jest liczba $-\frac{8}{5}$
- granicą ciągu $a_n = \frac{5}{\sqrt{5n+7}}$ jest liczba 0
- granicą ciągu $a_n = \frac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4}$ jest liczba $\frac{1}{3}$
- granicą ciągu $a_n = (-1)^n$ nie istnieje

Granica ciągu liczbowego

Definicja

Ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy właściwej $g \in \mathbb{R}$, co zapisujemy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_\varepsilon \mid a_n - g \mid < \varepsilon.$$

Powyższą definicję rozumiemy następująco : dla dowolnie małej dodatniej liczby ε można wskazać taką liczbę n_ε , odpowiednio dobraną do ε , że wszystkie wyrazy ciągu (a_n) o numerach większych niż n_ε będą różnić się od liczby g (=granicy ciągu) o mniej niż ε .

Zadanie 1. Na podstawie powyższej definicji pokazać, że :

- granicą ciągów: $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{2+(-1)^n}{n}$, $c_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$ jest liczba 0
- granicą ciągu $a_n = \frac{3}{n+2}$ jest liczba 0
- granicą ciągu $a_n = \frac{n+1}{n+11}$ jest liczba 1
- granicą ciągu $a_n = \frac{3-8n}{5n+4}$ jest liczba $-\frac{8}{5}$
- granicą ciągu $a_n = \frac{5}{\sqrt{5n+7}}$ jest liczba 0
- granicą ciągu $a_n = \frac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4}$ jest liczba $\frac{1}{3}$
- granica ciągu $a_n = (-1)^n$ nie istnieje

Definicja

Ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy niewłaściwej $+\infty$, co zapisujemy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_\varepsilon \ a_n > \varepsilon.$$

Powyższą definicję rozumiemy następująco : Dostatecznie dalekie wyrazy tego ciągu są większe od dowolnie dużej liczby (ε).

Analogicznie:

Definicja

Ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy niewłaściwej $-\infty$, co zapisujemy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall \varepsilon < 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_\varepsilon \ a_n < \varepsilon$.

Trochę haseł:

- Ciągi zbieżne do granicy właściwej (czyli do liczby) nazywamy zbieżnymi.
- Ciągi zbieżne do granicy niewłaściwej (czyli do $\pm\infty$) nazywamy rozbieżnymi lub rozbieżnymi (jak również zbieżnymi) do $\pm\infty$.
- Ciągi, które nie posiadają granicy również nazywamy rozbieżnymi (część osób określa je również jako "niezbieżne").

Definicja

Ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy niewłaściwej $+\infty$, co zapisujemy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_\varepsilon \ a_n > \varepsilon.$$

Powyższą definicję rozumiemy następująco : Dostatecznie dalekie wyrazy tego ciągu są większe od dowolnie dużej liczby (ε).

Analogicznie:

Definicja

Ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy niewłaściwej $-\infty$, co zapisujemy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall \varepsilon < 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_\varepsilon \ a_n < \varepsilon$.

Trochę haseł:

- Ciągi zbieżne do granicy właściwej (czyli do liczby) nazywamy zbieżnymi.
- Ciągi zbieżne do granicy niewłaściwej (czyli do $\pm\infty$) nazywamy rozbieżnymi lub rozbieżnymi (jak również zbieżnymi) do $\pm\infty$.
- Ciągi, które nie posiadają granicy również nazywamy rozbieżnymi (część osób określa je również jako "niezbieżne").

Definicja

Ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy niewłaściwej $+\infty$, co zapisujemy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_\varepsilon \ a_n > \varepsilon.$$

Powyższą definicję rozumiemy następująco : Dostatecznie dalekie wyrazy tego ciągu są większe od dowolnie dużej liczby (ε) .

Analogicznie:

Definicja

Ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy niewłaściwej $-\infty$, co zapisujemy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall \varepsilon < 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_\varepsilon \ a_n < \varepsilon$.

Trochę haseł:

- Ciągi zbieżne do granicy właściwej (czyli do liczby) nazywamy zbieżnymi.
- Ciągi zbieżne do granicy niewłaściwej (czyli do $\pm\infty$) nazywamy rozbieżnymi lub rozbieżnymi (jak również zbieżnymi) do $\pm\infty$.
- Ciągi, które nie posiadają granicy również nazywamy rozbieżnymi (część osób określa je również jako "niezbieżne").

Definicja

Ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy niewłaściwej $+\infty$, co zapisujemy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_\varepsilon \ a_n > \varepsilon.$$

Powyższą definicję rozumiemy następująco : Dostatecznie dalekie wyrazy tego ciągu są większe od dowolnie dużej liczby (ε) .

Analogicznie:

Definicja

Ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy niewłaściwej $-\infty$, co zapisujemy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall \varepsilon < 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_\varepsilon \ a_n < \varepsilon$.

Trochę haseł:

- Ciągi zbieżne do granicy właściwej (czyli do liczby) nazywamy zbieżnymi.
- Ciągi zbieżne do granicy niewłaściwej (czyli do $\pm\infty$) nazywamy rozbieżnymi lub rozbieżnymi (jak również zbieżnymi) do $\pm\infty$.
- Ciągi, które nie posiadają granicy również nazywamy rozbieżnymi (część osób określa je również jako "niezbieżne").

Definicja

Ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy niewłaściwej $+\infty$, co zapisujemy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_\varepsilon \ a_n > \varepsilon.$$

Powyższą definicję rozumiemy następująco : Dostatecznie dalekie wyrazy tego ciągu są większe od dowolnie dużej liczby (ε).

Analogicznie:

Definicja

Ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy niewłaściwej $-\infty$, co zapisujemy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall \varepsilon < 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_\varepsilon \ a_n < \varepsilon$.

Trochę haseł:

- Ciągi zbieżne do granicy właściwej (czyli do liczby) nazywamy zbieżnymi.
- Ciągi zbieżne do granicy niewłaściwej (czyli do $\pm\infty$) nazywamy rozbieżnymi lub rozbieżnymi (jak również zbieżnymi) do $\pm\infty$.
- Ciągi, które nie posiadają granicy również nazywamy rozbieżnymi (część osób określa je również jako "niezbieżne").

Definicja

Ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy niewłaściwej $+\infty$, co zapisujemy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_\varepsilon \ a_n > \varepsilon.$$

Powyższą definicję rozumiemy następująco : Dostatecznie dalekie wyrazy tego ciągu są większe od dowolnie dużej liczby (ε).

Analogicznie:

Definicja

Ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy niewłaściwej $-\infty$, co zapisujemy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall \varepsilon < 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_\varepsilon \ a_n < \varepsilon$.

Trochę haseł:

- Ciągi zbieżne do granicy właściwej (czyli do liczby) nazywamy zbieżnymi.
- Ciągi zbieżne do granicy niewłaściwej (czyli do $\pm\infty$) nazywamy rozbieżnymi lub rozbieżnymi (jak również zbieżnymi) do $\pm\infty$.
- Ciągi, które nie posiadają granicy również nazywamy rozbieżnymi (część osób określa je również jako "niezbieżne").

Twierdzenie (o ciągu monotonicznym i ograniczonym)

Każdy ciąg monotoniczny (od pewnego miejsca) i ograniczony jest zbieżny, przy czym:

- ciąg niemalejący (od pewnego miejsca) i ograniczony z góry jest zbieżny do granicy, która jest kresem górnym zbioru jego wartości,*
- ciąg nierosnący (od pewnego miejsca) i ograniczony z dołu jest zbieżny do granicy, która jest kresem dolnym zbioru jego wartości.*

Zadanie 2. Korzystając z powyższego twierdzenia uzasadnić, że:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{100^n}{n!} = 0,$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2, \quad b_1 = \sqrt{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{2 + b_n}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \sqrt{2}, \quad c_1 = 1, \quad c_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+c_n}$

Zadanie 3. Korzystając z twierdzenia o ciągu monotonicznym i ograniczonym wykazać zbieżność poniższych ciągów:

$$a_n = \frac{3n^2}{n^2+1}, \quad b_n = 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}, \quad c_n = \frac{n^3}{10^n},$$
$$d_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}, \quad e_n = \frac{1}{3^1+1} + \frac{1}{3^2+2} + \dots + \frac{1}{3^n+n}$$

Twierdzenie (o ciągu monotonicznym i ograniczonym)

Każdy ciąg monotoniczny (od pewnego miejsca) i ograniczony jest zbieżny, przy czym:

- ciąg niemalejący (od pewnego miejsca) i ograniczony z góry jest zbieżny do granicy, która jest kresem górnym zbioru jego wartości,*
- ciąg nierosnący (od pewnego miejsca) i ograniczony z dołu jest zbieżny do granicy, która jest kresem dolnym zbioru jego wartości.*

Zadanie 2. Korzystając z powyższego twierdzenia uzasadnić, że:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{100^n}{n!} = 0,$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2, \quad b_1 = \sqrt{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{2 + b_n}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \sqrt{2}, \quad c_1 = 1, \quad c_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+c_n}$

Zadanie 3. Korzystając z twierdzenia o ciągu monotonicznym i ograniczonym wykazać zbieżność poniższych ciągów:

$$a_n = \frac{3n^2}{n^2+1}, \quad b_n = 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}, \quad c_n = \frac{n^3}{10^n},$$
$$d_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}, \quad e_n = \frac{1}{3^1+1} + \frac{1}{3^2+2} + \dots + \frac{1}{3^n+n}$$

Twierdzenie (o ciągu monotonicznym i ograniczonym)

Każdy ciąg monotoniczny (od pewnego miejsca) i ograniczony jest zbieżny, przy czym:

- ciąg niemalejący (od pewnego miejsca) i ograniczony z góry jest zbieżny do granicy, która jest kresem górnym zbioru jego wartości,*
- ciąg nierosnący (od pewnego miejsca) i ograniczony z dołu jest zbieżny do granicy, która jest kresem dolnym zbioru jego wartości.*

Zadanie 2. Korzystając z powyższego twierdzenia uzasadnić, że:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{100^n}{n!} = 0,$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2, \quad b_1 = \sqrt{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{2 + b_n}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \sqrt{2}, \quad c_1 = 1, \quad c_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+c_n}$

Zadanie 3. Korzystając z twierdzenia o ciągu monotonicznym i ograniczonym wykazać zbieżność poniższych ciągów:

$$a_n = \frac{3n^2}{n^2+1}, \quad b_n = 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}, \quad c_n = \frac{n^3}{10^n},$$

$$d_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}, \quad e_n = \frac{1}{3^1+1} + \frac{1}{3^2+2} + \dots + \frac{1}{3^n+n}$$

Twierdzenie (o ciągu monotonicznym i ograniczonym)

Każdy ciąg monotoniczny (od pewnego miejsca) i ograniczony jest zbieżny, przy czym:

- ciąg niemalejący (od pewnego miejsca) i ograniczony z góry jest zbieżny do granicy, która jest kresem górnym zbioru jego wartości,*
- ciąg nierosnący (od pewnego miejsca) i ograniczony z dołu jest zbieżny do granicy, która jest kresem dolnym zbioru jego wartości.*

Zadanie 2. Korzystając z powyższego twierdzenia uzasadnić, że:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{100^n}{n!} = 0,$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2, \quad b_1 = \sqrt{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{2 + b_n}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \sqrt{2}, \quad c_1 = 1, \quad c_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+c_n}$

Zadanie 3. Korzystając z twierdzenia o ciągu monotonicznym i ograniczonym wykazać zbieżność poniższych ciągów:

$$a_n = \frac{3n^2}{n^2+1}, \quad b_n = 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}, \quad c_n = \frac{n^3}{10^n},$$
$$d_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}, \quad e_n = \frac{1}{3^1+1} + \frac{1}{3^2+2} + \dots + \frac{1}{3^n+n}$$

Tabela odczytywania wartości pewnych wyrażeń:

$a + \infty = \infty, -\infty < a \leq \infty$	$a \cdot \infty = \infty, 0 < a \leq \infty$
$\frac{a}{\infty} = 0, -\infty < a < \infty$	$\frac{a}{0^+} = \infty, 0 < a \leq \infty$
$\frac{a}{0^+} = -\infty, -\infty \leq a < 0$	$\frac{a}{0^-} = -\infty, 0 < a \leq \infty$
$\frac{a}{0^-} = \infty, -\infty \leq a < 0$	
$a^\infty = 0, 0^+ \leq a < 1$	$a^\infty = \infty, 1 < a \leq \infty$
$\infty^a = 0, -\infty \leq a < 0$	$\infty^a = \infty, 0 < b \leq \infty$

Symbole nieoznaczone: $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 1^∞ , 0^0 , ∞^0

Tabela odczytywania wartości pewnych wyrażeń:

$a + \infty = \infty, -\infty < a \leq \infty$	$a \cdot \infty = \infty, 0 < a \leq \infty$
$\frac{a}{\infty} = 0, -\infty < a < \infty$	$\frac{a}{0^+} = \infty, 0 < a \leq \infty$
$\frac{a}{0^+} = -\infty, -\infty \leq a < 0$	$\frac{a}{0^-} = -\infty, 0 < a \leq \infty$
$\frac{a}{0^-} = \infty, -\infty \leq a < 0$	
$a^\infty = 0, 0^+ \leq a < 1$	$a^\infty = \infty, 1 < a \leq \infty$
$\infty^a = 0, -\infty \leq a < 0$	$\infty^a = \infty, 0 < a \leq \infty$

Symbole nieoznaczone: $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 1^∞ , 0^0 , ∞^0

Granice niektórych ciągów:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n} = 0, \quad b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0, \alpha > 0 \quad c) \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha = +\infty, \alpha > 0$$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0, |x| < 1 \quad e) \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \infty, x > 1 \quad f) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1, a > 0$$

$$g) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \quad h) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0, \alpha > 0, a > 1 \quad i) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n} = 0, n > 1$$

$$j) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{n!} = \infty \quad k) \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty, a > 1 \quad l) \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0, |a| < 1$$

$$m) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad n) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} \quad o) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$$

$p) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$ o ile (a_n) to ciąg o wyrazach dodatnich zbieżny do granicy niewłaściwej (∞) .

Arytmetyka granic

Dla ciągów (a_n) , (b_n) zbieżnych lub rozbieżnych do ∞ lub $-\infty$ mamy :

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n;$
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n;$
- c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}, \quad \text{jeśli } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0;$
- d) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^p = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)^p, \quad p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\};$
- f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}, \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{1\};$

Zadanie 4. Obliczyć granice poniższych ciągów:

$$a_n = \frac{(n+7)^{14}}{(2n-4)^7}, \quad b_n = \frac{n^2+3n-2}{1+2+3+\dots+n}, \quad c_n = \frac{2+4+6+\dots+2n}{(8-3n)(5+7n)},$$

$$d_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(5n-3)(2-7n)}{3+6+9+\dots+3n}, \quad e_n = \frac{5+10+15+\dots+5n}{n+1}, \quad f_n = \frac{\sqrt{4n^2-n+1}}{9-2n},$$

$$g_n = \frac{\sqrt{n+3}+2\sqrt{n}}{3\sqrt{4n+7}+5\sqrt{9n+1}}, \quad h_n = \left(\frac{3n+7}{8n+4} + \frac{3n-4}{6n+5} \right)^2, \quad i_n = \frac{\sqrt{4n^2+3n+7}}{3-5n},$$

$$j_n = \sqrt[3]{\frac{8n^6+1}{n^6-2}}, \quad k_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n-5}, \quad l_n = \frac{3^n-4^n}{5^n+4^n}, \quad m_n = \frac{5 \cdot 4^{n-2} + 3 \cdot 2^{n+1}}{2 \cdot 4^{n+1} - 6 \cdot 2^n},$$

$$o_n = \left(\frac{2^{2n}+2 \cdot 3^n-1}{4^n+3^n+2} \right)^5, \quad p_n = \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{3^{n-1}}}, \quad r_n = \frac{7+49+343+\dots+7^n}{3 \cdot 7^n-2},$$

$$s_n = (\sqrt{9n^2+7n-1} - \sqrt{9n^2+16n}), \quad t_n = \left(\frac{n^2+6}{n^2} \right)^{n^2}, \quad u_n = \left(\frac{n^2+2}{2n^2+1} \right)^{n^2},$$

$$v_n = \left(\frac{n^2-1}{n^2} \right)^{3n^2-n}, \quad w_n = \sqrt[3]{n^3+3n^2} - n, \quad x_n = \frac{\log_2(n+1)}{\log_3(n+1)}, \quad y_n = \sin n\pi,$$

$$z_n = \sin \frac{n\pi}{2}.$$

Zadanie 4. Obliczyć granice poniższych ciągów:

$$a_n = \frac{(n+7)^{14}}{(2n-4)^7}, \quad b_n = \frac{n^2+3n-2}{1+2+3+\dots+n}, \quad c_n = \frac{2+4+6+\dots+2n}{(8-3n)(5+7n)},$$

$$d_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(5n-3)(2-7n)}{3+6+9+\dots+3n}, \quad e_n = \frac{5+10+15+\dots+5n}{n+1}, \quad f_n = \frac{\sqrt{4n^2-n+1}}{9-2n},$$

$$g_n = \frac{\sqrt{n+3}+2\sqrt{n}}{3\sqrt{4n+7}+5\sqrt{9n+1}}, \quad h_n = \left(\frac{3n+7}{8n+4} + \frac{3n-4}{6n+5} \right)^2, \quad i_n = \frac{\sqrt{4n^2+3n+7}}{3-5n},$$

$$j_n = \sqrt[3]{\frac{8n^6+1}{n^6-2}}, \quad k_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n-5}, \quad l_n = \frac{3^n-4^n}{5^n+4^n}, \quad m_n = \frac{5 \cdot 4^{n-2} + 3 \cdot 2^{n+1}}{2 \cdot 4^{n+1} - 6 \cdot 2^n},$$

$$o_n = \left(\frac{2^{2n}+2 \cdot 3^n-1}{4^n+3^n+2} \right)^5, \quad p_n = \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{3^{n-1}}}, \quad r_n = \frac{7+49+343+\dots+7^n}{3 \cdot 7^n-2},$$

$$s_n = (\sqrt{9n^2+7n-1} - \sqrt{9n^2+16n}), \quad t_n = \left(\frac{n^2+6}{n^2} \right)^{n^2}, \quad u_n = \left(\frac{n^2+2}{2n^2+1} \right)^{n^2},$$

$$v_n = \left(\frac{n^2-1}{n^2} \right)^{3n^2-n}, \quad w_n = \sqrt[3]{n^3+3n^2} - n, \quad x_n = \frac{\log_2(n+1)}{\log_3(n+1)}, \quad y_n = \sin n\pi,$$

$$z_n = \sin \frac{n\pi}{2}.$$

Zadanie 5. Spośród ciągów o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{(k^2-2k-3)n+1}{-n}$ wybrać ten, który ma granicę równą 4.

Zadanie 4. Obliczyć granice poniższych ciągów:

$$a_n = \frac{(n+7)^{14}}{(2n-4)^7}, \quad b_n = \frac{n^2+3n-2}{1+2+3+\dots+n}, \quad c_n = \frac{2+4+6+\dots+2n}{(8-3n)(5+7n)},$$

$$d_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(5n-3)(2-7n)}{3+6+9+\dots+3n}, \quad e_n = \frac{5+10+15+\dots+5n}{n+1}, \quad f_n = \frac{\sqrt{4n^2-n+1}}{9-2n},$$

$$g_n = \frac{\sqrt{n+3}+2\sqrt{n}}{3\sqrt{4n+7}+5\sqrt{9n+1}}, \quad h_n = \left(\frac{3n+7}{8n+4} + \frac{3n-4}{6n+5} \right)^2, \quad i_n = \frac{\sqrt{4n^2+3n+7}}{3-5n},$$

$$j_n = \sqrt[3]{\frac{8n^6+1}{n^6-2}}, \quad k_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n-5}, \quad l_n = \frac{3^n-4^n}{5^n+4^n}, \quad m_n = \frac{5 \cdot 4^{n-2} + 3 \cdot 2^{n+1}}{2 \cdot 4^{n+1} - 6 \cdot 2^n},$$

$$o_n = \left(\frac{2^{2n}+2 \cdot 3^n-1}{4^n+3^n+2} \right)^5, \quad p_n = \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{3^{n-1}}}, \quad r_n = \frac{7+49+343+\dots+7^n}{3 \cdot 7^n-2},$$

$$s_n = (\sqrt{9n^2+7n-1} - \sqrt{9n^2+16n}), \quad t_n = \left(\frac{n^2+6}{n^2} \right)^{n^2}, \quad u_n = \left(\frac{n^2+2}{2n^2+1} \right)^{n^2},$$

$$v_n = \left(\frac{n^2-1}{n^2} \right)^{3n^2-n}, \quad w_n = \sqrt[3]{n^3+3n^2} - n, \quad x_n = \frac{\log_2(n+1)}{\log_3(n+1)}, \quad y_n = \sin n\pi,$$

$$z_n = \sin \frac{n\pi}{2}.$$

Zadanie 5. Spośród ciągów o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{(k^2-2k-3)n+1}{-n}$ wybrać ten, który ma granicę równą 4.

Zadanie 6. Określić, dla jakich wartości parametru p granicą ciągu $a_n = \frac{(p+7)n^2+n}{5-7pn^2}$ jest liczba 0.

Zadanie 4. Obliczyć granice poniższych ciągów:

$$a_n = \frac{(n+7)^{14}}{(2n-4)^7}, \quad b_n = \frac{n^2+3n-2}{1+2+3+\dots+n}, \quad c_n = \frac{2+4+6+\dots+2n}{(8-3n)(5+7n)},$$

$$d_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(5n-3)(2-7n)}{3+6+9+\dots+3n}, \quad e_n = \frac{5+10+15+\dots+5n}{n+1}, \quad f_n = \frac{\sqrt{4n^2-n+1}}{9-2n},$$

$$g_n = \frac{\sqrt{n+3}+2\sqrt{n}}{3\sqrt{4n+7}+5\sqrt{9n+1}}, \quad h_n = \left(\frac{3n+7}{8n+4} + \frac{3n-4}{6n+5} \right)^2, \quad i_n = \frac{\sqrt{4n^2+3n+7}}{3-5n},$$

$$j_n = \sqrt[3]{\frac{8n^6+1}{n^6-2}}, \quad k_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n-5}, \quad l_n = \frac{3^n-4^n}{5^n+4^n}, \quad m_n = \frac{5 \cdot 4^{n-2} + 3 \cdot 2^{n+1}}{2 \cdot 4^{n+1} - 6 \cdot 2^n},$$

$$o_n = \left(\frac{2^{2n}+2 \cdot 3^n-1}{4^n+3^n+2} \right)^5, \quad p_n = \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{3^{n-1}}}, \quad r_n = \frac{7+49+343+\dots+7^n}{3 \cdot 7^n-2},$$

$$s_n = (\sqrt{9n^2+7n-1} - \sqrt{9n^2+16n}), \quad t_n = \left(\frac{n^2+6}{n^2} \right)^{n^2}, \quad u_n = \left(\frac{n^2+2}{2n^2+1} \right)^{n^2},$$

$$v_n = \left(\frac{n^2-1}{n^2} \right)^{3n^2-n}, \quad w_n = \sqrt[3]{n^3+3n^2} - n, \quad x_n = \frac{\log_2(n+1)}{\log_3(n+1)}, \quad y_n = \sin n\pi,$$

$$z_n = \sin \frac{n\pi}{2}.$$

Zadanie 5. Spośród ciągów o wyrażeniu ogólnym $a_n = \frac{(k^2-2k-3)n+1}{-n}$ wybrać ten, który ma granicę równą 4.

Zadanie 6. Określić, dla jakich wartości parametru p granicą ciągu $a_n = \frac{(p+7)n^2+n}{5-7pn^2}$ jest liczba 0.

Zadanie 7. Określić, dla jakich wartości parametru p granicą ciągu $a_n = \frac{(p^2+3p-6)n^3+n^2+5}{3-pn^3}$ jest liczba 2.

Zadanie . Niech α_n ($n \geq 3$) oznacza miarę kąta wewnętrznego n -kąta foremnego. Obliczyć granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$.

Twierdzenie (o trzech ciągach)

Niech dane będą ciągi $(a_n), (b_n), (c_n)$. Jeśli

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n > N$$

oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = g,$$

to $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g$.

Zadanie . Niech α_n ($n \geq 3$) oznacza miarę kąta wewnętrznego n -kąta foremnego. Obliczyć granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$.

Twierdzenie (o trzech ciągach)

Niech dane będą ciągi $(a_n), (b_n), (c_n)$. Jeśli

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n > N$$

oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = g,$$

to $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g$.

Zadanie 6. Udowodnić powyższe twierdzenie.

Zadanie . Niech α_n ($n \geq 3$) oznacza miarę kąta wewnętrznego n -kąta foremnego. Obliczyć granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$.

Twierdzenie (o trzech ciągach)

Niech dane będą ciągi $(a_n), (b_n), (c_n)$. Jeśli

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n > N$$

oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = g,$$

to $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g$.

Zadanie 6. Udowodnić powyższe twierdzenie.

Zadanie 7. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach znaleźć granice poniższych ciągów:

$$a_n = \sqrt[n]{3^n + \pi^n + 7^n}, \quad b_n = \frac{5 \cos n}{n^2 + 2}, \quad c_n = \frac{\sin^2 n + 2n}{5n - 1},$$

$$d_n = \sqrt[n]{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \cdots + \frac{n}{n-1}}, \quad e_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}}.$$

Twierdzenie (o dwóch ciągach)

Niech dane będą ciągi $(a_n), (b_n)$. Jeśli

$$a_n \leq b_n \quad \forall n > N$$

oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty,$$

to $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$.

Prawdziwe jest również analogiczne twierdzenie dla ciągów zbieżnych do granicy niewłaściwej $(-\infty)$.

Zadanie . Na mocy powyższego twierdzenia uzasadnić, że:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} [4n + (-1)^n \cdot n] = \infty$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-n^2}{n-\sin n} = -\infty$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \right) = \infty$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E(n^3 \sqrt{2})}{E(\sqrt{n^2+1})} = \infty$.

Definicja

Podciągiem nazywamy ciąg pozostały po skreśleniu pewnej (być może nieskończonej) liczby wyrazów ciągu wyjściowego.

Twierdzenie

Każdy podciąg ciągu zbieżnego (do granicy właściwej lub niewłaściwej) jest zbieżny do tej samej granicy.

Powyższe twierdzenie daje wygodną metodę dowodzenia, że dany ciąg nie ma granicy. Wystarczy w tym celu wybrać z niego dwa podciągi zbieżne do różnych granic.

Zadanie 8. Pokazać, wskazując odpowiednie podciągi, że ciągi $a_n = (-1)^n$, $b_n = \cos n\pi$, $c_n = [n + (-1)^n n^2]$ nie mają granic.

Definicja (sąsiedztwa)

1. Sąsiedztwem o promieniu $r > 0$ punktu $x_0 \in \mathbb{R}$ nazywamy zbiór

$$S(x_0, r) \stackrel{df}{=} (x_0 - r, x_0 + r) \setminus \{x_0\}.$$

2. Sąsiedztwem lewostronnym o promieniu $r > 0$ punktu $x_0 \in \mathbb{R}$ nazywamy zbiór

$$S(x_0^-, r) \stackrel{df}{=} (x_0 - r, x_0).$$

3. Sąsiedztwem prawostronnym o promieniu $r > 0$ punktu $x_0 \in \mathbb{R}$ nazywamy zbiór

$$S(x_0^+, r) \stackrel{df}{=} (x_0, x_0 + r).$$

Definicja (granicy właściwej funkcji w punkcie wg Cauchy'ego)

Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz niech funkcja f będzie określona przynajmniej na sąsiedztwie $S(x_0)$. Liczba g jest granicą funkcji f w punkcie x_0 , co symbolicznie zapisujemy w postaci równości $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in S(x_0) [(|x - x_0| < \delta) \implies (|f(x) - g| < \varepsilon)].$$

Definicja (granicy lewostronnej właściwej funkcji w punkcie wg Cauchy'ego)

Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz niech funkcja f będzie określona przynajmniej na sąsiedztwie $S(x_0^-)$. Liczba g jest granicą lewostronną funkcji f w punkcie x_0 , co symbolicznie zapisujemy w postaci równości $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = g$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in S(x_0^-) [(0 < x_0 - x < \delta) \implies (|f(x) - g| < \varepsilon)].$$

Definicja (granicy prawostronnej właściwej funkcji w punkcie wg Cauchy'ego)

Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz niech funkcja f będzie określona przynajmniej na sąsiedztwie $S(x_0^+)$. Liczba g jest granicą prawostronną funkcji f w punkcie x_0 , co symbolicznie zapisujemy w postaci równości $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = g$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall_{x \in S(x_0^+)} [(0 < x - x_0 < \delta) \implies (|f(x) - g| < \varepsilon)].$$

Zadanie. Korzystając z definicji Cauchy'ego granicy funkcji w punkcie uzasadnić podane równości:

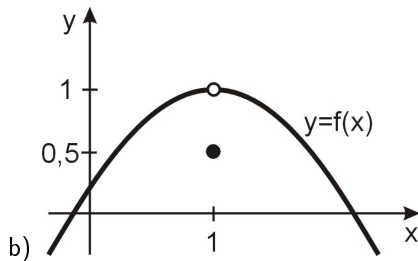
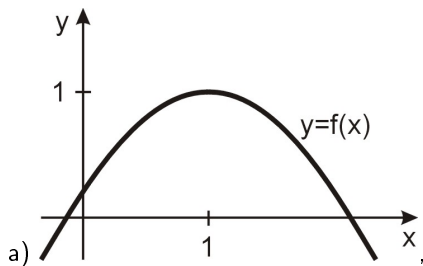
- a) $\lim_{x \rightarrow 2} (5 - 3x) = -1$; b) $\lim_{x \rightarrow 4} x^2 = 16$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2}$;
d) $\lim_{x \rightarrow \pi} \sin x = 0$.

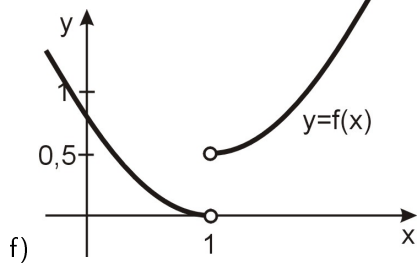
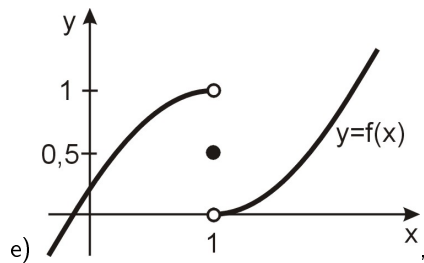
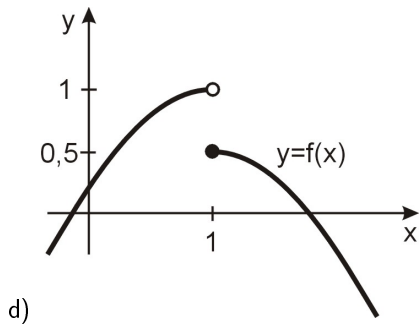
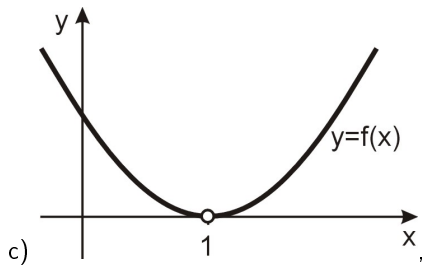
Zadanie. Korzystając z definicji Cauchy'ego granicy jednostronnej w punkcie uzasadnić podane równości:

- a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} (3x - 1) = 2$; b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{8-x^3}{|2-x|} = 12$; c) $\lim_{x \rightarrow 0^-} 2^{\frac{1}{x}} = 0$;
d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x = 1$.

Zadanie.

Dla funkcji, których wykresy przedstawiono na rysunkach, podać granice jednostronne w punkcie $x_0 = 1$ lub uzasadnić, że one nie istnieją:





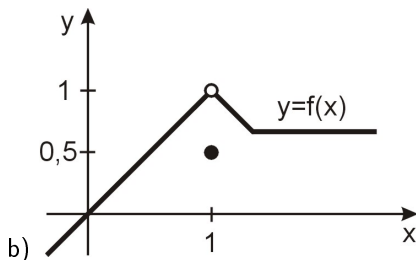
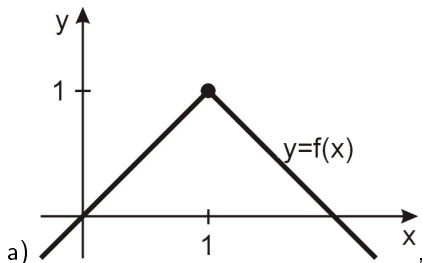
Twierdzenie (warunek konieczny i wystarczający istnienia granicy)

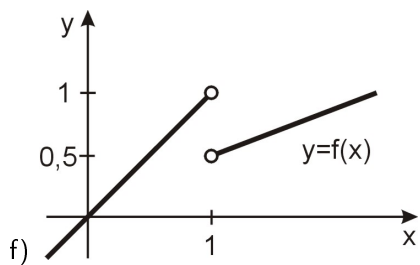
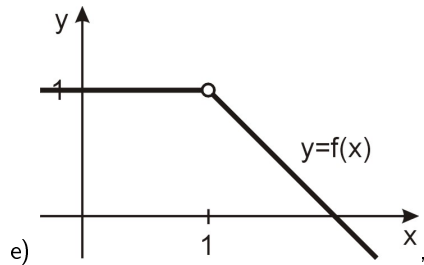
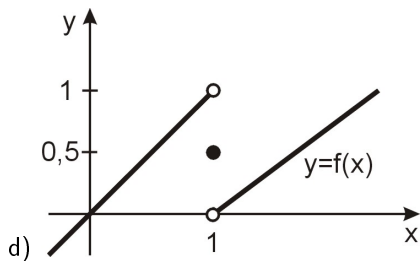
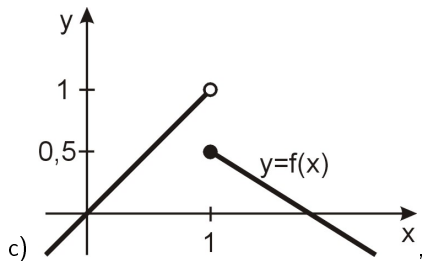
Funkcja f ma w punkcie x_0 granicę (właściwą lub niewłaściwą) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x).$$

Wspólna wartość granic jednostronnych jest wtedy granicą funkcji.

Zadanie. Dla funkcji, których wykresy przedstawiono na rysunkach, podać granicę w punkcie $x_0 = 1$ lub uzasadnić, że granica ta nie istnieje:





Twierdzenie (o arytmetyce granic funkcji)

Jeżeli funkcje f i g mają granice właściwe w punkcie x_0 , to

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x),$
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} g(x),$
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \right),$
4. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)},$ o ile $g(x) \neq 0,$
5. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^{g(x)} = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}.$

Twierdzenie (o granicach niewłaściwych funkcji)

- | | |
|--|---|
| 1. $p + \infty = +\infty$ dla $-\infty < p \leq +\infty$ | 2. $p \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$ dla $0 < p \leq +\infty$ |
| 3. $\frac{p}{\pm\infty} = 0$ dla $-\infty < p < +\infty$ | 4. $\frac{p}{0^+} = +\infty$ dla $0 < p \leq +\infty$ |
| 5. $p^{+\infty} = 0$ dla $0^+ \leq p < 1$ | 6. $p^{+\infty} = +\infty$ dla $1 < p \leq +\infty$ |
| 7. $(+\infty)^q = 0$ dla $-\infty \leq q < 0$ | 8. $(+\infty)^q = +\infty$ dla $0 < q \leq +\infty$ |

Zadanie. Zbadać, obliczając granice jednostronne, czy istnieją podane granice:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x};$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sgn} x;$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} 2^{\frac{1}{x^3}};$

d) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} [3 \sin x];$

e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{|x - 2|};$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x - 1|^3}{x^3 - x^2};$

g) $\lim_{x \rightarrow -1} \operatorname{sgn} [x(1 - x^2)];$

h) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{|2x - \pi|};$

i) $\lim_{x \rightarrow 3} [x];$

j) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-1};$

k) $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{x}};$

l) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{sgn}(1 - x^2)}{\operatorname{sgn}(x^3 - 1)}$

m) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|}{x-1} + x;$

n) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{(x-3)^2}$

Zadanie. Korzystając z twierdzeń o arytmetyce granic obliczyć podane granice:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^5 - 1};$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}};$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot 5^x - 2^x}{3^x - 4 \cdot 5^x};$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^3}{x^3 + 2};$

e) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 + \sqrt[5]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}};$

f) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x-5};$

g) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{1-x}};$

h) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 - 9x + 20};$

i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^3 + x^2 - x - 1};$

j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x} + 2}{\sqrt{1+x^2}};$

k) $\lim_{x \rightarrow 10^6} \frac{\sqrt{x} - 10^3}{\sqrt[3]{x} - 10^2};$

l) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^3 x}{\cos x};$

m) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[4]{x^4 + 1}}{x};$

n) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{25^x - 9^x}{5^x - 3^x};$

o) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^4 - 1};$

p) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x + 1}{3^x + 2};$

q) $\lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt[3]{x} - 4}{\sqrt{x} - 8};$

r) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}^2 x + 1}{\operatorname{tg}^2 x + 5};$

s) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{2x};$

t) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x};$

u) $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{2x} - e^x);$

v) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{x^2 + 1} - x \right);$

w) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} + x \right)$

x) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 16x + 12}{x^3 + 16x^2 + 52x + 48};$

y) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 16x + 12}{x^3 + 16x^2 + 52x + 48}.$

Dla granic funkcji istnieją odpowiedniki twierdzeń o trzech i dwóch ciągach:

Twierdzenie (o trzech funkcjach)

Jeżeli funkcje f , g i h spełniają warunki

1. $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ dla każdego $x \in S(x_0)$,

2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = p$,

to $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = p$.

Twierdzenie (o dwóch funkcjach)

Jeżeli funkcje f i g spełniają warunki

1. $f(x) \leq g(x)$ dla każdego $x \in S(x_0)$,

2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$,

to $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$.

Prawdziwe jest analogiczne twierdzenie dla granicy niewłaściwej $-\infty$.

Zadanie. Korzystając z twierdzenia o trzech funkcjach obliczyć podane granice:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 (2 + \cos \frac{1}{x})$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[e^x]}{e^x + 1}$; c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \sin^2 \frac{1}{x}$;
d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \cos x$; e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[x]{4^x + 9^x}$; f) $\lim_{x \rightarrow 2} [x] \sin(\pi x)$;
g) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \cos \frac{1}{x^2}$; h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \sin x}{x^2}$; i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x + \sin^2 x}$;
j) $\lim_{x \rightarrow 0} x (3 - \sin \frac{1}{x^2})$

Zadanie. Korzystając z twierdzenia o dwóch funkcjach uzasadnić podane równości:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 + \cos \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} = +\infty$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin x - e^x) = -\infty$;
c) $\lim_{x \rightarrow \pi} \left[\frac{2x}{\pi} \right] \operatorname{ctg}^2 x = +\infty$; d) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \left[\frac{2}{x^2} \right] \right) = -\infty$;
e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 + \sin \frac{1}{x}}{x} = +\infty$; f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^5 - \sin x) = +\infty$;
g) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2x - \sin x} = +\infty$; h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x (2 + \cos x) = +\infty$.

Poniżej znajduje się lista podstawowych granic, z których można korzystać przy liczeniu granic funkcji:

Granice podstawowych wyrażeń nieoznaczonych

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \text{ gdzie } a > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}, \text{ gdzie } a \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a, \text{ gdzie } a \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a, \text{ gdzie } a \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Uwaga nr 1 Wzory, w których granice wynoszą 1 możemy w naturalny sposób rozszerzyć na granice wyrażeń odwrotnych, np. prawdą jest, że $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$.

Uwaga nr 2 Każdy z powyższych wzorów można (i należy) uogólnić.

Przykładowo, skoro $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, to również $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\square} - 1}{\square} = 1$, gdzie $\square$ oznacza pewną funkcję zmiennej x taką, że $\lim_{x \rightarrow 0} \square = 0$.

Uwaga nr 3 Proszę zauważyć, że zdecydowana większość powyższych wzorów zachodzi dla $x \rightarrow 0$. Jeśli $x \rightarrow a$, gdzie $a \neq 0$, to nie możemy stosować tych wzorów! Możemy za to spróbować dokonać zamiany zmiennej tak, aby nowa zmienna dążyła do 0.

Korzystając z granic podstawowych wyrażeń nieoznaczonych obliczyć podane granice:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\sin 5x};$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+5}{3x+7} \right)^{x+1};$$

$$\text{g) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-2x^3)}{x^3};$$

$$\text{j) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cos x)^{\frac{1}{2x-\pi}};$$

$$\text{m) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5 \cdot 3^x - 3 \cdot 5^x}{2 \cdot 7^x - 7 \cdot 2^x};$$

$$\text{p) } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 2x}{\sin 7x};$$

$$\text{s) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[6]{1+x^5}-1}{x};$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-1}{\sin 2x};$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+5}{x^2-7} \right)^{x^2};$$

$$\text{h) } \lim_{x \rightarrow 0} \sin 3x \operatorname{ctg} 5x;$$

$$\text{k) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{\arcsin 2x};$$

$$\text{n) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{e^x-1};$$

$$\text{q) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+x) - \ln x}{\sin(\frac{1}{x})};$$

$$\text{t) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3-x}-1}{\sin \pi x};$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x-2^x}{x};$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^{2x-1};$$

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{tg} \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}};$$

$$\text{l) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^x-5^x}{3^x-2^x};$$

$$\text{o) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x};$$

$$\text{r) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{\operatorname{tg} x};$$

$$\text{u) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 2}{x-2}.$$

Praca w grupach

Po zajęciach z granic funkcji (około 4 godziny lekcyjne) i ciągłości (około 4 godziny lekcyjne) przejdziemy do omawiania szeregów liczbowych. W tym celu podzielę Was na 8 grup. Każda z nich będzie miała do przygotowania pewne zagadnienie z teorii szeregów. Tematyka została już przeze mnie wymyślona, nie przydzieliłem jednak jeszcze osób do poszczególnych grup. Zrobię to na najbliższych zajęciach na każdej ze specjalności. Celem każdej grupy będzie zreferowanie przydzielonego zagadnienia na zajęciach z szeregów (2-4 godziny lekcyjne). To ja wyznaczam osoby z grupy do konkretnych przykładów (tak więc należy być przygotowanym do całego swojego zagadnienia, a nie tylko wybranych przez siebie fragmentów). Kolejność nie jest przypadkowa, referujemy zgodnie z poniższą listą zagadnień :

- ❶
 - Wyjaśnić pojęcia: ciąg sum częściowych, szereg, suma szeregu, szereg zbieżny, rozbieżny, szereg o wyrazach nieujemnych, szereg naprzemienny
 - Obliczyć sumy częściowe i następnie zbadać zbieżność szeregów:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)(2n+1)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n}{6^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$$

- 2
- Sformułować warunek konieczny zbieżności szeregu i na jego mocy uzasadnić, że szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(\sin \frac{1}{n})$ są rozbieżne.
 - Opierając się jedynie na warunku koniecznym, powiedzieć, jakie wnioski można wyciągnąć odnośnie zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, a jakie odnośnie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.
 - Co nazywamy szeregiem geometrycznym, a co szeregiem harmonicznym rzędu α ? Podać przykłady.

- 3
- Podać treść (ogólnego) kryterium porównawczego i ilorazowego.
 - Na podstawie tych kryteriów zbadać zbieżność szeregów:
 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n \cdot 3^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^3+2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}^2(\frac{1}{\sqrt{n}})$.

- 4
- Przytoczyć treść kryterium d'Alemberta.
 - Korzystając z kryterium d'Alemberta zbadać zbieżność szeregów:
 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n-1}}{2^{3n-1}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.
 - Podać przykład szeregu, którego zbieżności nie rozstrzyga kryterium d'Alemberta.
 - W zależności od parametru $a > 0$ zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$.

- 5
- Przytoczyć treść kryterium Cauchy'ego.
 - Korzystając z kryterium Cauchy'ego zbadać zbieżność szeregów:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{\sqrt{4n^2+3}} \right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{n^3 \cdot 3^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}.$$
 - Podać przykład szeregu, którego zbieżności nie rozstrzyga kryterium Cauchy'ego.
 - Które kryterium - d'Alemberta czy Cauchy'ego jest silniejsze? Jak to rozumieć?
- 6
- Przytoczyć treść kryterium kondensacyjnego (inaczej: o zagęszczaniu) Cauchy'ego (najlepiej z Wikipedii w wersji anglojęzycznej)
 - Na podstawie kryterium kondensacyjnego zbadać zbieżność szeregów:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\log n|}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}.$$
- 7
- Co oznaczają hasła : szereg bezwzględnie zbieżny, szereg warunkowo zbieżny?
 - Podać twierdzenie o zbieżności szeregów zbieżnych bezwzględnie.
 - Zbadać zbieżność bezwzględną szeregów:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n^2}.$$
 Na mocy twierdzenia z poprzedniego punktu, wyciągnąć stosowne wnioski.
- 8
- Sformułować kryterium Dirichleta, Abela oraz Leibniza zbieżności szeregów.
 - Korzystając z kryterium Leibniza uzasadnić zbieżność szeregów :

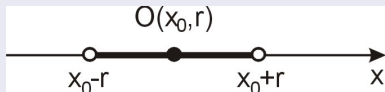
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n - \ln n}.$$

Uwaga. Czasami mogą być przydatne nierówności takie, jak $\ln n < n$ oraz $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ dla $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Definicja (otoczenia punktu)

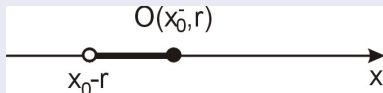
1. *Otoczeniem o promieniu $r > 0$ punktu $x_0 \in \mathbb{R}$ nazywamy zbiór*

$$O(x_0, r) \stackrel{df}{=} (x_0 - r; x_0 + r)$$



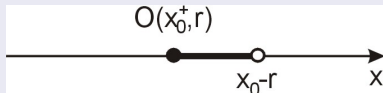
2. *Otoczeniem lewostronnym o promieniu $r > 0$ punktu $x_0 \in \mathbb{R}$ nazywamy zbiór*

$$O(x_0^-, r) \stackrel{df}{=} (x_0 - r; x_0]$$



3. *Otoczeniem prawostronnym o promieniu $r > 0$ punktu $x_0 \in \mathbb{R}$ nazywamy zbiór*

$$O(x_0^+, r) \stackrel{df}{=} [x_0; x_0 + r)$$

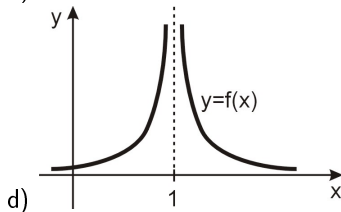
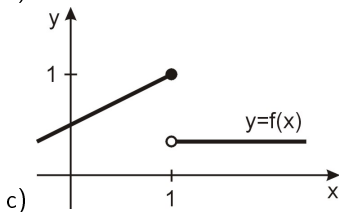
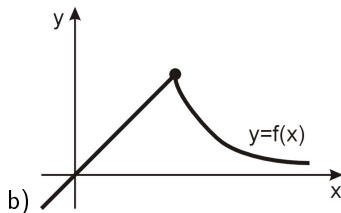
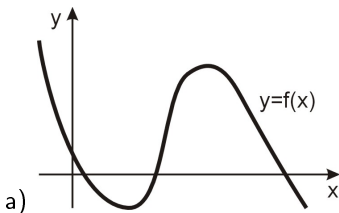


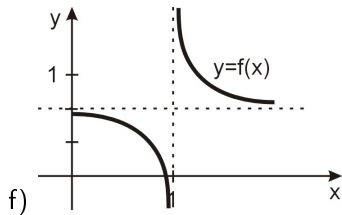
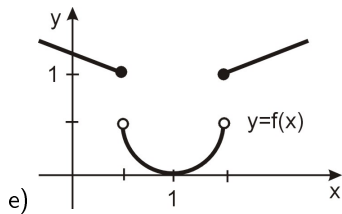
Definicja (funkcja ciągła w punkcie)

Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz niech funkcja f będzie określona przynajmniej na otoczeniu $O(x_0)$. Funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Wskazać punkty, w których funkcje o podanych wykresach nie są ciągłe:





Definicja (funkcja ciągła na przedziale)

Funkcja jest ciągła na przedziale otwartym $(a; b)$, jeżeli jest ciągła w każdym punkcie tego przedziału. Funkcja jest ciągła na przedziale domkniętym $[a; b]$, jeżeli jest ciągła w każdym punkcie przedziału otwartego $(a; b)$ oraz prawostronnie ciągła w punkcie a i lewostronnie ciągła w punkcie b .

Definicja (nieciągłość funkcji)

Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz niech funkcja f będzie określona przynajmniej na otoczeniu $O(x_0)$. Funkcja f jest nieciągła w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje granica

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

albo gdy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0).$$

Nieciągłość funkcji można rozważać jedynie w punktach należących do jej dziedziny!

Definicja (Rodzaje nieciągłości)

1. Funkcja f ma w punkcie x_0 nieciągłość pierwszego rodzaju, jeżeli istnieją granice właściwe $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+}$ oraz $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq f(x_0)$ lub $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq f(x_0)$.

Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 nieciągłość pierwszego rodzaju typu "skok", jeżeli spełnia warunek $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$.

Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 nieciągłość pierwszego rodzaju typu "luka", jeżeli spełnia warunek $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq f(x_0)$.

2. Funkcja f ma w punkcie x_0 nieciągłość drugiego rodzaju, jeżeli nie istnieje lub jest niewłaściwa, co najmniej jedna z granic $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$.

Zbadać lewostronną i prawostronną ciągłość funkcji we wskazanych punktach:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x < 1, \\ 3 - x & \text{dla } x \geq 1, \end{cases} \quad x_0 = 1;$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 2 & \text{dla } x < -2, \\ x^2 + 5x + 6 & \text{dla } x \geq -2, \end{cases} \quad x_0 = -2;$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{1-x}-1} & \text{dla } x < 0, \\ -2 & \text{dla } x = 0, \\ -\frac{\sin 2x}{x} & \text{dla } x > 0, \end{cases} \quad x_0 = 0;$$

$$\text{d) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{|x-1|} & \text{dla } x \neq 1, \\ -2 & \text{dla } x = 1, \end{cases} \quad x_0 = 1;$$

$$\text{e) } f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} & \text{dla } x > 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{dla } x < 0, \end{cases} \quad x_0 = 0.$$

Zbadać ciągłość podanych funkcji we wskazanych punktach:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 7x - 2 & \text{dla } x \leq 1, \\ x^2 & \text{dla } x > 1, \end{cases} \quad x_0 = 1;$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \leq 2, \\ 2x & \text{dla } x > 2, \end{cases} \quad x_0 = 2;$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2 - x - 6|}{x + 2} & \text{dla } x \neq -2, \\ 5 & \text{dla } x = -2, \end{cases} \quad x_0 = -2.$$

Dobrać parametry $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby podane funkcje były ciągłe we wskazanych punktach:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} |\arctg x| & \text{dla } |x| < 1, \\ x(ax + b) & \text{dla } |x| > 1, \end{cases} \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 1$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{ax} & \text{dla } x < 0, \\ x + b & \text{dla } x \geq 0, \end{cases} \quad x_0 = 0;$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } |x| \leq 1, \\ x^2 + ax + b & \text{dla } |x| > 1, \end{cases} \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 1;$$

$$\text{d) } f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{dla } |x| \geq \frac{\pi}{2}, \\ ax + b & \text{dla } |x| < \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad x_1 = -\frac{\pi}{2}, \quad x_2 = \frac{\pi}{2};$$

$$\text{e) } f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \leq 0, \\ a^x + b & \text{dla } 0 < x < 1, \\ 3 & \text{dla } x \geq 1, \end{cases} \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1;$$

$$\text{f) } f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{dla } |x| < 2, \\ a\sqrt{x^2 - 1} & \text{dla } |x| \geq 2, \end{cases} \quad x_1 = -2, \quad x_2 = 2;$$

$$\text{g) } f(x) = \begin{cases} a \sin x + b \cos x & \text{dla } |x| > \frac{\pi}{4}, \\ 1 + \operatorname{tg} x & \text{dla } |x| \leq \frac{\pi}{4}, \end{cases} \quad x_1 = -\frac{\pi}{4}, \quad x_2 = \frac{\pi}{4};$$

$$\text{h) } f(x) = \begin{cases} (x - 1)^3 & \text{dla } x \leq 0, \\ ax + b & \text{dla } 0 < x < 1, \\ \sqrt{x} & \text{dla } x \geq 1, \end{cases} \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1;$$

$$\text{i) } f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } |x| \leq 1, \\ x^2 + ax + b & \text{dla } |x| > 1, \end{cases} \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 1.$$

Określić rodzaje nieciągłości podanych funkcji w punkcie $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & dla \quad x < 0, \\ 0 & dla \quad x = 0, \\ \frac{e^x - 1}{x} & dla \quad x > 0; \end{cases} \\ \text{b) } f(x) &= \begin{cases} 1 - \cos \frac{1}{x} & dla \quad x < 0, \\ 0 & dla \quad x = 0, \\ \sqrt{x} \sin \frac{1}{x} & dla \quad x > 0; \end{cases} \\ \text{c) } f(x) &= \begin{cases} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}} & dla \quad x \neq 0, \\ 0 & dla \quad x = 0; \end{cases} \\ \text{d) } f(x) &= \begin{cases} |x| \left[\frac{1}{x} \right] & dla \quad x \neq 0, \\ 1 & dla \quad x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Określić rodzaje nieciągłości podanych funkcji we wskazanych punktach:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} & \text{dla } x \in (0; 1) \cup (1; +\infty), \\ 3 & \text{dla } x = 1, \end{cases} \quad x_0 = 1;$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{e^{\frac{1}{x}}+2}{e^{\frac{1}{x}}+1} & \text{dla } x \neq 0, \\ e & \text{dla } x = 0, \end{cases} \quad x_0 = 0;$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} \frac{|x|+x}{x^2} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \end{cases} \quad x_0 = 0;$$

$$\text{d) } f(x) = \begin{cases} (1-x)^{\frac{1}{x}} & \text{dla } x < 0, \\ e & \text{dla } x = 0, \\ (1+x)^{\frac{1}{x}} & \text{dla } x > 0, \end{cases} \quad x_0 = 0;$$

$$\text{e) } f(x) = \operatorname{sgn}[x(x-1)], \quad x_0 = 1;$$

$$\text{f) } f(x) = \begin{cases} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{dla } x = 0, \end{cases} \quad x_0 = 0.$$

Oto lista twierdzeń, które zapewne poznacie na wykładzie. Czasami pomagają one szybko rozstrzygnąć ciągłość danej funkcji:

Twierdzenie (o ciągłości funkcji elementarnych)

Funkcje elementarne są ciągłe w swoich dziedzinach.

Twierdzenie (o ciągłości sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu funkcji)

Jeżeli funkcje f i g są ciągłe w punkcie x_0 , to funkcja $f \pm g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ ($g(x_0) \neq 0$) jest ciągła w punkcie x_0 .

Twierdzenie (o ciągłości funkcji złożonej)

Jeżeli

- 1. funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 ,*
 - 2. funkcja g jest ciągła w punkcie $y_0 = f(x_0)$,*
- to funkcja złożona $g \circ f$ jest ciągła w punkcie x_0 .*

Twierdzenie (o ciągłości funkcji odwrotnej)

Niech I i J będą dowolnymi przedziałami. Jeżeli funkcja $f : I \xrightarrow{na} J$ jest ściśle monotoniczna i ciągła, to funkcja odwrotna $f^{-1} : J \xrightarrow{na} I$ także jest ciągła.

Oto lista twierdzeń, które zapewne poznacie na wykładzie. Czasami pomagają one szybko rozstrzygnąć ciągłość danej funkcji:

Twierdzenie (o ciągłości funkcji elementarnych)

Funkcje elementarne są ciągłe w swoich dziedzinach.

Twierdzenie (o ciągłości sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu funkcji)

Jeżeli funkcje f i g są ciągłe w punkcie x_0 , to funkcja $f \pm g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ ($g(x_0) \neq 0$) jest ciągła w punkcie x_0 .

Twierdzenie (o ciągłości funkcji złożonej)

Jeżeli

- 1. funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 ,*
 - 2. funkcja g jest ciągła w punkcie $y_0 = f(x_0)$,*
- to funkcja złożona $g \circ f$ jest ciągła w punkcie x_0 .*

Twierdzenie (o ciągłości funkcji odwrotnej)

Niech I i J będą dowolnymi przedziałami. Jeżeli funkcja $f : I \xrightarrow{na} J$ jest ściśle monotoniczna i ciągła, to funkcja odwrotna $f^{-1} : J \xrightarrow{na} I$ także jest ciągła.

Oto lista twierdzeń, które zapewne poznacie na wykładzie. Czasami pomagają one szybko rozstrzygnąć ciągłość danej funkcji:

Twierdzenie (o ciągłości funkcji elementarnych)

Funkcje elementarne są ciągłe w swoich dziedzinach.

Twierdzenie (o ciągłości sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu funkcji)

Jeżeli funkcje f i g są ciągłe w punkcie x_0 , to funkcja $f \pm g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ ($g(x_0) \neq 0$) jest ciągła w punkcie x_0 .

Twierdzenie (o ciągłości funkcji złożonej)

Jeżeli

- 1. funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 ,*
 - 2. funkcja g jest ciągła w punkcie $y_0 = f(x_0)$,*
- to funkcja złożona $g \circ f$ jest ciągła w punkcie x_0 .*

Twierdzenie (o ciągłości funkcji odwrotnej)

Niech I i J będą dowolnymi przedziałami. Jeżeli funkcja $f : I \xrightarrow{na} J$ jest ściśle monotoniczna i ciągła, to funkcja odwrotna $f^{-1} : J \xrightarrow{na} I$ także jest ciągła.

Oto lista twierdzeń, które zapewne poznacie na wykładzie. Czasami pomagają one szybko rozstrzygnąć ciągłość danej funkcji:

Twierdzenie (o ciągłości funkcji elementarnych)

Funkcje elementarne są ciągłe w swoich dziedzinach.

Twierdzenie (o ciągłości sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu funkcji)

Jeżeli funkcje f i g są ciągłe w punkcie x_0 , to funkcja $f \pm g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ ($g(x_0) \neq 0$) jest ciągła w punkcie x_0 .

Twierdzenie (o ciągłości funkcji złożonej)

Jeżeli

- 1. funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 ,*
 - 2. funkcja g jest ciągła w punkcie $y_0 = f(x_0)$,*
- to funkcja złożona $g \circ f$ jest ciągła w punkcie x_0 .*

Twierdzenie (o ciągłości funkcji odwrotnej)

Niech I i J będą dowolnymi przedziałami. Jeżeli funkcja $f : I \xrightarrow{na} J$ jest ściśle monotoniczna i ciągła, to funkcja odwrotna $f^{-1} : J \xrightarrow{na} I$ także jest ciągła.

Trzy ważne twierdzenia dotyczące funkcji ciągłych

Twierdzenie (Bolzano-Cauchy'ego)

Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale domkniętym $[a; b]$ oraz spełnia warunek $f(a)f(b) < 0$, to istnieje punkt $c \in (a; b)$ taki, że $f(c) = 0$.

Uzasadnić, że podane równania mają jednoznaczne rozwiązania we wskazanych przedziałach:

a) $4^x = x^2$, $(-1; 0)$;

c) $\operatorname{ctg} x = x$, $(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3})$;

e) $x \sin x = 7$, $(2\pi; \frac{5\pi}{2})$;

g) $x^2 + \ln x = 0$, $(\frac{1}{e}; 1)$;

i) $3^x + x = 3$, $(0; 1)$;

k) $x^{100} + x - 1 = 0$, $(\frac{1}{2}; 1)$;

b) $e^x = \frac{1}{x}$, $(\frac{1}{2}; 1)$;

d) $x^3 + 6x - 2 = 0$, $(0; 1)$;

f) $3^x + 5^x = 9$, $(1; 2)$;

h) $1 = \frac{\sin x}{2} + x$, $(0; \frac{\pi}{2})$;

j) $\ln x + 2x = 1$, $(\frac{1}{2}; 1)$;

l) $x2^x = 1$, $(0; 1)$.

Twierdzenie (Darboux o wartości pośredniej)

Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale domkniętym $[a; b]$ oraz

1. $f(a) < f(b)$,

2. $p \in (f(a); f(b))$,

to istnieje taki punkt $c \in (a; b)$ dla którego $f(c) = p$.

Uzasadnić, że:

a) funkcja $f(x) = e^{\sin x}$ przyjmuje w przedziale $[0; \frac{\pi}{2}]$ wartość 2;

b) funkcja $f(x) = \sin(\pi x) + \cos(\pi x) - 1$ przyjmuje w przedziale $[\frac{1}{2}; 1]$ wartość -1.

Udowodnić, że funkcja ciągła $f : [0, 1] \Rightarrow [0, 1]$ posiada punkt stały, tzn. istnieje taki punkt $a \in [0, 1]$, że $f(a) = a$.

Twierdzenie (Darboux o wartości pośredniej)

Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale domkniętym $[a; b]$ oraz

1. $f(a) < f(b)$,

2. $p \in (f(a); f(b))$,

to istnieje taki punkt $c \in (a; b)$ dla którego $f(c) = p$.

Uzasadnić, że:

a) funkcja $f(x) = e^{\sin x}$ przyjmuje w przedziale $[0; \frac{\pi}{2}]$ wartość 2;

b) funkcja $f(x) = \sin(\pi x) + \cos(\pi x) - 1$ przyjmuje w przedziale $[\frac{1}{2}; 1]$ wartość -1.

Udowodnić, że funkcja ciągła $f : [0, 1] \Rightarrow [0, 1]$ posiada punkt stały, tzn. istnieje taki punkt $a \in [0, 1]$, że $f(a) = a$.

Twierdzenie (Weierstrassa o ograniczoności i osiągnięciu kresów)

Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a; b]$, to

1. jest ograniczona, tzn. istnieją stałe m i M takie, że

$$m \leq f(x) \leq M \text{ dla wszystkich } x \in [a; b];$$

2. osiąga swoje kresy, tzn. istnieją punkty $c, d \in [a, b]$ takie, że

$$f(c) = \inf_{x \in [a; b]} f(x) \text{ oraz } f(d) = \sup_{x \in [a; b]} f(x).$$

Uzasadnić, że:

- wśród prostokątów wpisanych w koło o promieniu R jest ten, który ma największe pole;
- wśród walców wpisanych w stożek o promieniu podstawy R i wysokości H istnieje ten który ma największą objętość;

Twierdzenie (Weierstrassa o ograniczoności i osiągnięciu kresów)

Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a; b]$, to

1. jest ograniczona, tzn. istnieją stałe m i M takie, że

$$m \leq f(x) \leq M \text{ dla wszystkich } x \in [a; b];$$

2. osiąga swoje kresy, tzn. istnieją punkty $c, d \in [a, b]$ takie, że

$$f(c) = \inf_{x \in [a; b]} f(x) \text{ oraz } f(d) = \sup_{x \in [a; b]} f(x).$$

Uzasadnić, że:

- wśród prostokątów wpisanych w koło o promieniu R jest ten, który ma największe pole;
- wśród walców wpisanych w stożek o promieniu podstawy R i wysokości H istnieje ten który ma największą objętość;

Ciągłość kontra ciągłość jednostajna

Definicja (ciągłości Cauchy'ego $\varepsilon - \delta$)

Funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in O(x_0) [(|x - x_0| < \delta) \implies (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)].$$

Inaczej mówiąc: funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 , gdy małe zmiany argumentu x względem tego punktu powodują małe zmiany wartości funkcji $f(x)$ względem $f(x_0)$.

Korzystając z powyższej definicji, uzasadnić ciągłość podanych funkcji we wskazanych punktach:

a) $f(x) = 2x - 3, x_0 = 1;$

b) $f(x) = x^2 + 1, x_0 = 2;$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x}, x_0 = 0;$

d) $f(x) = \sin x, x_0 = \pi.$

Ciągłość kontra ciągłość jednostajna

Definicja (ciągłości Cauchy'ego $\varepsilon - \delta$)

Funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in O(x_0) [(|x - x_0| < \delta) \implies (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)].$$

Inaczej mówiąc: funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 , gdy małe zmiany argumentu x względem tego punktu powodują małe zmiany wartości funkcji $f(x)$ względem $f(x_0)$.

Korzystając z powyższej definicji, uzasadnić ciągłość podanych funkcji we wskazanych punktach:

a) $f(x) = 2x - 3, x_0 = 1;$

b) $f(x) = x^2 + 1, x_0 = 2;$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x}, x_0 = 0;$

d) $f(x) = \sin x, x_0 = \pi.$

Ciągłość kontra ciągłość jednostajna

Definicja (ciągłości Cauchy'ego $\varepsilon - \delta$)

Funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in O(x_0) [(|x - x_0| < \delta) \implies (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)].$$

Inaczej mówiąc: funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 , gdy małe zmiany argumentu x względem tego punktu powodują małe zmiany wartości funkcji $f(x)$ względem $f(x_0)$.

Korzystając z powyższej definicji, uzasadnić ciągłość podanych funkcji we wskazanych punktach:

a) $f(x) = 2x - 3, x_0 = 1;$

b) $f(x) = x^2 + 1, x_0 = 2;$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x}, x_0 = 0;$

d) $f(x) = \sin x, x_0 = \pi.$

Funkcja f jest **ciągła** na zbiorze $A \subset R$, jeśli jest ciągła w każdym punkcie tego zbioru, czyli

$$\forall x \in A \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_{x,\varepsilon} > 0 \quad \forall y \in A \quad [|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon].$$

Funkcja f jest **jednostajnie ciągła** na zbiorze $A \subset R$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \quad \forall x \in A \quad \forall y \in A \quad [|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon].$$

Jednostajna ciągłość jest warunkiem mocniejszym od ciągłości (z jednostajnej ciągłości automatycznie wynika ciągłość). Badając ciągłość funkcji f w każdym punkcie $x \in A$, dobieramy do $\varepsilon > 0$ liczbę $\delta > 0$, ale robimy to dla każdego punktu $x \in A$ osobno. Badając jednostajną ciągłość, dobieramy do $\varepsilon > 0$ liczbę $\delta > 0$, która jest wspólna dla wszystkich punktów $x \in A$.

Zadanie. Pokażemy, że:

- funkcja $f(x) = x^2$ jest jednostajnie ciągła na przedziale $[0, 2]$
- funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ jest jednostajnie ciągła na przedziale $[a, \infty)$, gdzie jest dowolną dodatnią liczbą.

Funkcja f jest **ciągła** na zbiorze $A \subset \mathbb{R}$, jeśli jest ciągła w każdym punkcie tego zbioru, czyli

$$\forall x \in A \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_{x,\varepsilon} > 0 \quad \forall y \in A \quad [|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon].$$

Funkcja f jest **jednostajnie ciągła** na zbiorze $A \subset \mathbb{R}$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \quad \forall x \in A \quad \forall y \in A \quad [|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon].$$

Jednostajna ciągłość jest warunkiem mocniejszym od ciągłości (z jednostajnej ciągłości automatycznie wynika ciągłość). Badając ciągłość funkcji f w każdym punkcie $x \in A$, dobieramy do $\varepsilon > 0$ liczbę $\delta > 0$, ale robimy to dla każdego punktu $x \in A$ osobno. Badając jednostajną ciągłość, dobieramy do $\varepsilon > 0$ liczbę $\delta > 0$, która jest wspólna dla wszystkich punktów $x \in A$.

Zadanie. Pokażemy, że:

- funkcja $f(x) = x^2$ jest jednostajnie ciągła na przedziale $[0, 2]$
- funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ jest jednostajnie ciągła na przedziale $[a, \infty)$, gdzie jest dowolną dodatnią liczbą.

Funkcja f jest **ciągła** na zbiorze $A \subset R$, jeśli jest ciągła w każdym punkcie tego zbioru, czyli

$$\forall x \in A \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_{x,\varepsilon} > 0 \quad \forall y \in A \quad [|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon].$$

Funkcja f jest **jednostajnie ciągła** na zbiorze $A \subset R$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \quad \forall x \in A \quad \forall y \in A \quad [|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon].$$

Jednostajna ciągłość jest warunkiem mocniejszym od ciągłości (z jednostajnej ciągłości automatycznie wynika ciągłość). Badając ciągłość funkcji f w każdym punkcie $x \in A$, dobieramy do $\varepsilon > 0$ liczbę $\delta > 0$, ale robimy to dla każdego punktu $x \in A$ osobno. Badając jednostajną ciągłość, dobieramy do $\varepsilon > 0$ liczbę $\delta > 0$, która jest wspólna dla wszystkich punktów $x \in A$.

Zadanie. Pokażemy, że:

- funkcja $f(x) = x^2$ jest jednostajnie ciągła na przedziale $[0, 2]$
- funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ jest jednostajnie ciągła na przedziale $[a, \infty)$, gdzie jest dowolną dodatnią liczbą.

Funkcja f jest **ciągła** na zbiorze $A \subset R$, jeśli jest ciągła w każdym punkcie tego zbioru, czyli

$$\forall x \in A \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_{x,\varepsilon} > 0 \quad \forall y \in A \quad [|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon].$$

Funkcja f jest **jednostajnie ciągła** na zbiorze $A \subset R$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \quad \forall x \in A \quad \forall y \in A \quad [|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon].$$

Jednostajna ciągłość jest warunkiem mocniejszym od ciągłości (z jednostajnej ciągłości automatycznie wynika ciągłość). Badając ciągłość funkcji f w każdym punkcie $x \in A$, dobieramy do $\varepsilon > 0$ liczbę $\delta > 0$, ale robimy to dla każdego punktu $x \in A$ osobno. Badając jednostajną ciągłość, dobieramy do $\varepsilon > 0$ liczbę $\delta > 0$, która jest wspólna dla wszystkich punktów $x \in A$.

Zadanie. Pokażemy, że:

- funkcja $f(x) = x^2$ jest jednostajnie ciągła na przedziale $[0, 2]$
- funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ jest jednostajnie ciągła na przedziale $[a, \infty)$, gdzie jest dowolną dodatnią liczbą.

Funkcja f jest **ciągła** na zbiorze $A \subset R$, jeśli jest ciągła w każdym punkcie tego zbioru, czyli

$$\forall x \in A \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_{x,\varepsilon} > 0 \quad \forall y \in A \quad [|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon].$$

Funkcja f jest **jednostajnie ciągła** na zbiorze $A \subset R$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \quad \forall x \in A \quad \forall y \in A \quad [|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon].$$

Jednostajna ciągłość jest warunkiem mocniejszym od ciągłości (z jednostajnej ciągłości automatycznie wynika ciągłość). Badając ciągłość funkcji f w każdym punkcie $x \in A$, dobieramy do $\varepsilon > 0$ liczbę $\delta > 0$, ale robimy to dla każdego punktu $x \in A$ osobno. Badając jednostajną ciągłość, dobieramy do $\varepsilon > 0$ liczbę $\delta > 0$, która jest wspólna dla wszystkich punktów $x \in A$.

Zadanie. Pokażemy, że:

- funkcja $f(x) = x^2$ jest jednostajnie ciągła na przedziale $[0, 2]$
- funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ jest jednostajnie ciągła na przedziale $[a, \infty)$, gdzie jest dowolną dodatnią liczbą.

Twierdzenie (Cantora - warunek wystarczający jednostajnej ciągłości)

Funkcja ciągła na przedziale domkniętym jest na nim jednostajnie ciągła.

Przykład: funkcja $f(x) = \frac{x}{4-x^2}$ jest jednostajnie ciągła na przedziale $[-1, 1]$.

Twierdzenie

Niech $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Następujące warunki są równoważne :

- 1 funkcja f jest jednostajnie ciągła na A
- 2 dla każdych ciągów $(x_n), (y_n) \subset A$ z warunku $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0$ wynika, że $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) - f(y_n)) = 0$.

Zadanie. Pokazać, że funkcja $f(x) = x^2$ nie jest jednostajnie ciągła na $\mathbb{R}$.

Wskazówka - wziąć $x_n = n$, $y_n = n + \frac{1}{n}$.

Twierdzenie (Cantora - warunek wystarczający jednostajnej ciągłości)

Funkcja ciągła na przedziale domkniętym jest na nim jednostajnie ciągła.

Przykład: funkcja $f(x) = \frac{x}{4-x^2}$ jest jednostajnie ciągła na przedziale $[-1, 1]$.

Twierdzenie

Niech $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Następujące warunki są równoważne :

- 1 funkcja f jest jednostajnie ciągła na A
- 2 dla każdych ciągów $(x_n), (y_n) \subset A$ z warunku $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0$ wynika, że $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) - f(y_n)) = 0$.

Zadanie. Pokazać, że funkcja $f(x) = x^2$ nie jest jednostajnie ciągła na $\mathbb{R}$.

Wskazówka - wziąć $x_n = n$, $y_n = n + \frac{1}{n}$.

Twierdzenie (Cantora - warunek wystarczający jednostajnej ciągłości)

Funkcja ciągła na przedziale domkniętym jest na nim jednostajnie ciągła.

Przykład: funkcja $f(x) = \frac{x}{4-x^2}$ jest jednostajnie ciągła na przedziale $[-1, 1]$.

Twierdzenie

Niech $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Następujące warunki są równoważne :

- 1 funkcja f jest jednostajnie ciągła na A
- 2 dla każdych ciągów $(x_n), (y_n) \subset A$ z warunku $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0$ wynika, że $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) - f(y_n)) = 0$.

Zadanie. Pokazać, że funkcja $f(x) = x^2$ nie jest jednostajnie ciągła na $\mathbb{R}$.

Wskazówka - wziąć $x_n = n$, $y_n = n + \frac{1}{n}$.

Twierdzenie (Cantora - warunek wystarczający jednostajnej ciągłości)

Funkcja ciągła na przedziale domkniętym jest na nim jednostajnie ciągła.

Przykład: funkcja $f(x) = \frac{x}{4-x^2}$ jest jednostajnie ciągła na przedziale $[-1, 1]$.

Twierdzenie

Niech $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Następujące warunki są równoważne :

- 1 funkcja f jest jednostajnie ciągła na A
- 2 dla każdych ciągów $(x_n), (y_n) \subset A$ z warunku $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0$ wynika, że $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) - f(y_n)) = 0$.

Zadanie. Pokazać, że funkcja $f(x) = x^2$ nie jest jednostajnie ciągła na $\mathbb{R}$.

Wskazówka - wziąć $x_n = n$, $y_n = n + \frac{1}{n}$.

Twierdzenie (Cantora - warunek wystarczający jednostajnej ciągłości)

Funkcja ciągła na przedziale domkniętym jest na nim jednostajnie ciągła.

Przykład: funkcja $f(x) = \frac{x}{4-x^2}$ jest jednostajnie ciągła na przedziale $[-1, 1]$.

Twierdzenie

Niech $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Następujące warunki są równoważne :

- 1 funkcja f jest jednostajnie ciągła na A
- 2 dla każdych ciągów $(x_n), (y_n) \subset A$ z warunku $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0$ wynika, że $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) - f(y_n)) = 0$.

Zadanie. Pokazać, że funkcja $f(x) = x^2$ nie jest jednostajnie ciągła na $\mathbb{R}$.

Wskazówka - wziąć $x_n = n$, $y_n = n + \frac{1}{n}$.