Układ równań linowych

$$\begin{cases} x + 2y = 6, \\ 3x - y = 4 \end{cases} \tag{0}$$

Spotkania z Matematyką

Układy równań liniowych, macierze, Google

Aleksander Denisiuk

denisjuk@matman.uwm.edu.pl

Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie

Wydział Matematyki i Informatyki

ul. Żołnierska 14

10-561 Olsztyn

Drugi układ

$$\begin{cases} x + 2y = 6, \\ 3x + 6y = 4 \end{cases} \tag{0}$$

Układy równań liniowych, macierze, Google

Najnowsza wersja tego dokumentu dostępna jest pod adresem

http://wmii.uwm.edu.pl/~denisjuk/

Układ (0) nie jest układem

$$\begin{cases} x + 2y = 6, \\ 3x + 6y = 18 \end{cases}$$

Trzeci układ

$$\begin{cases} x + 2y = 6, \\ 3x + 6y = 18 \end{cases} \qquad (0)$$

Podsumowanie

- Układ może:
  - mieć jedyne rozwiązanie
  - nie mieć rozwiązań
  - mieć nieskończenie wiele rozwiązań
- Układ nie może mieć dokładnie 2 rozwiązań

Układ (0) jest sprzecznym

$$\begin{cases} x + 2y = 6, \\ 3x + 6y = 4 \end{cases}$$

- brak rozwiązań

Większa ilość niewiadomych

$$\begin{cases} x+y+z+t=1, \\ 2x+2y+2z+2t=0. \end{cases}$$

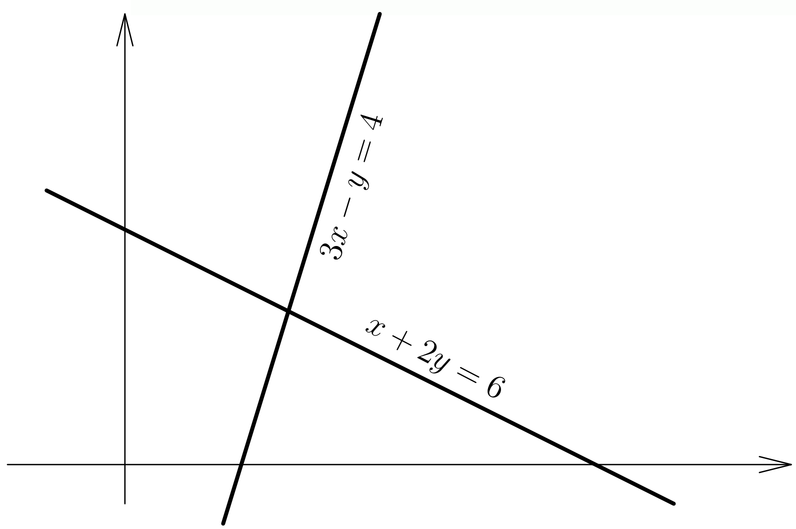
- Równań więcej, niż niewiadomych, układ sprzeczny

Większa ilość niewiadomych

$$\begin{cases} x+4y-2z+3t=9, \\ 2x-y-z-t=4, \\ 5x+7y+z-2t=7, \\ 3x-2y-8z+5t=21. \end{cases}$$

- $2R_1+3R_2-R_3 \Rightarrow$ sprzeczność

Pogląd geometryczny. Układ (0)



Większa ilość niewiadomych

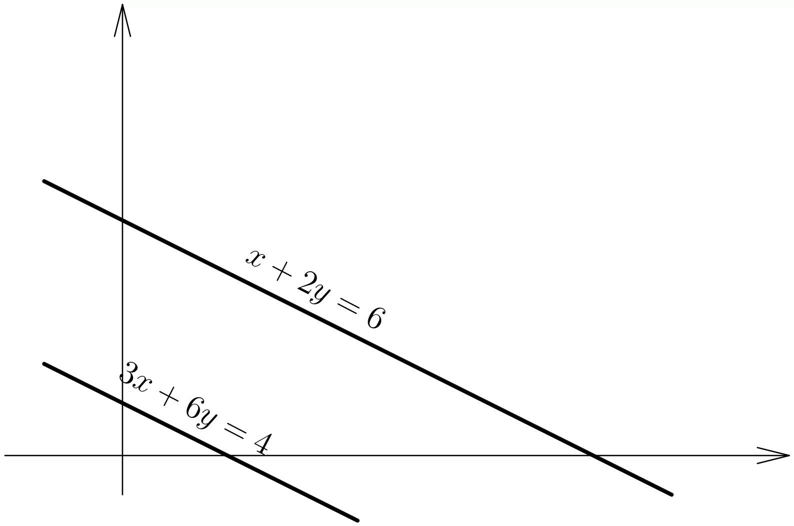
$$\begin{cases} x+4y-2z+3t=9, \\ 2x-y-z-t=4, \\ 5x+7y+z-2t=7, \\ 3x-2y-8z+5t=23. \end{cases}$$

- $2R_1+3R_2-R_3 \Rightarrow$ trzy równania, cztery niewiadome, układ nieokreślony

Ogólne podejście geometryczne

- Dwie płaszczyzny (dwa układy współrzędnych): (x, y) oraz (X, Y).
- Każdemu punktowi (x, y) przyporządkujemy punkt (X, Y), taki że
$$\begin{cases} x + 2y = X, \\ 3x - y = Y. \end{cases}$$
- Żeby rozwiązać układ (0), trzeba znaleźć taki punkt (x, y), że dla odpowiedniej pary (X, Y) spełniona była równość $(X, Y) = (6, 4)$.

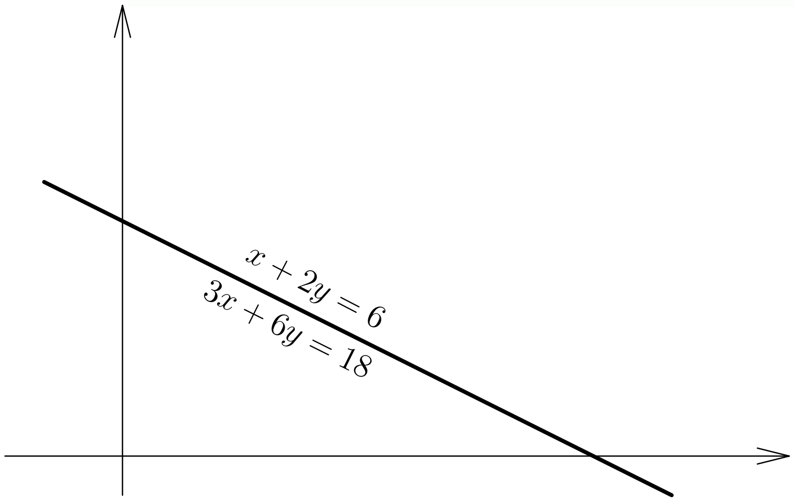
Pogląd geometryczny. Układ (0)



Przekształcenie $(x, y) \mapsto (X, Y)$

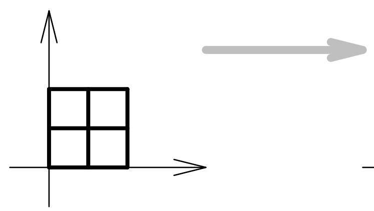
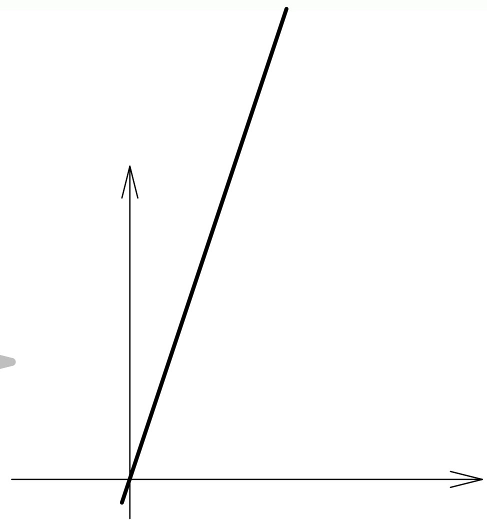
(x, y)	(X, Y)
$(0, 0)$	$(0, 0)$
$(0, 1)$	$(2, -1)$
$(0, 2)$	$(4, -2)$
$(1, 0)$	$(1, 3)$
$(1, 1)$	$(3, 2)$
$(1, 2)$	$(5, 1)$
$(2, 0)$	$(2, 6)$
$(2, 1)$	$(4, 5)$
$(2, 2)$	$(6, 4)$

Pogląd geometryczny. Układ (0)

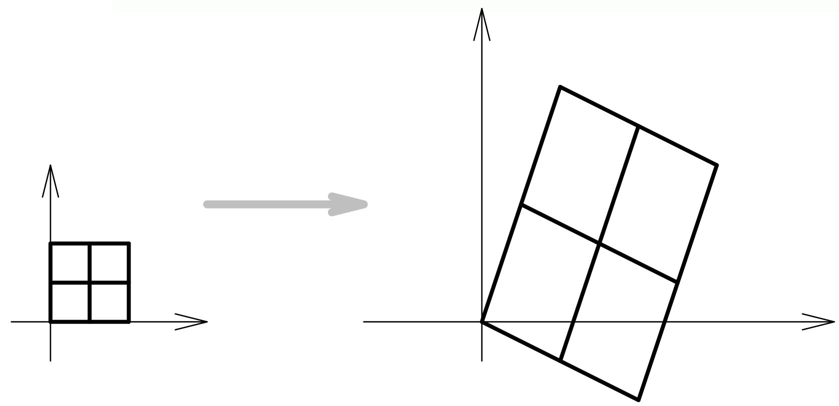


Geometria przekształcenia dla równań (0) i (0)

$$\begin{cases} x + 2y = X, \\ 3x + 6y = Y. \end{cases}$$

Geometria przekształcenia $(x, y) \mapsto (X, Y)$



Analiza układów (0) i (0)

- Obrazem całej płaszczyzny jest prosta.
- $(6, 4)$ nie leży na tej prostej $\Rightarrow$ układ (0) nie ma rozwiązań.
- $(6, 18)$ leży na prostej $\Rightarrow$ układ (0) ma rozwiązania.
- Cała prosta $x + 2y = 6$ zostaje *spłaszczona* do punktu $(6, 18) \Rightarrow$ układ (0) ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Analiza układu (0)

- Obrazem kwadratów są równoległoboki.
- Każdy punkt na płaszczyźnie (X, Y) jest obrazem pewnego punktu $(x, y) \Rightarrow$ dla każdych (X, Y) układ będzie miał rozwiązanie.
- Różne (x, y) przechodzą do różnych $(X, Y) \Rightarrow$ rozwiązanie jest jednoznaczne.

Jaki może być obraz T?

- Płaszczyzna — układ (0)
- Prosta — układy (0) oraz (0)

Analiza ogólnego układu

$$\begin{cases} ax + by = X \\ cx + dy = Y \end{cases}$$

- Właściwości układu zależą od właściwości przekształcenia $(x, y) \mapsto (ax + by, cx + dy)$

$$\begin{cases} ax + by + cz = X \\ dx + ey + fz = Y \\ gx + hy + kz = Z \end{cases}$$

- $(x, y, z) \mapsto (ax + by + cz, dx + ey + fz, gx + hy + kz)$

Obraz przekształcenia a przestrszeń rozwiązań

Obraz	Przestrzeń rozwiązań
płaszczyzna	punkt
prosta	prosta
punkt	płaszczyzna

Język teorii mnogości

$$\begin{cases} ax + by = X, \\ cx + dy = Y. \end{cases}$$

- Układ ma rozwiązanie $\iff$ (X, Y) *należy* do obrazu przekształcenia $T(x, y) \mapsto (ax + by, cx + dy)$

$$(X, Y) \in Im(T)$$

Układ w postaci macierzowej

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$, gdzie

- *iloczynem* macierzy $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ i kolumny $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ jest kolumna $\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$
- dwie kolumny są równe, jeżeli równę są ich odpowiedne elementy

W $\mathbb{R}^3$

Obraz	Przestrzeń rozwiązań
$\mathbb{R}^3$	punkt
płaszczyzna	prosta
prosta	płaszczyzna
punkt	$\mathbb{R}^3$

- W $\mathbb{R}^n$: suma *wymiaru* obrazu przekształcenia i *wymiaru* przestrzeni rozwiązań układu równa jest n

Układ trzech równań o trzech niewiadomych

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

Macierze

- Niech dane będzie przekształcenie $T(x,y) = (X,Y)$, gdzie $\begin{cases} ax+by = X, \\ cx+dy = Y. \end{cases}$
- *Macierz przekształcenia:* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
- *Wektory-kolumny:* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$.

Definicja iloczynu macierzy

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Aa + Bc & Ab + Bd \\ Ca + Dc & Cb + Dd \end{pmatrix}$$

Mnożenie przekształceń

- Niech dane będzie drugie przekształcenie,
  $U(X, Y) = (\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, gdzie $\begin{cases} AX + BY = \mathbf{X}, \\ CX + DY = \mathbf{Y}. \end{cases}$ czyli
  $$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix}$$
- *Iloczynem* przekształceń T i U jest przekształcenie złożone $UT(x, y) = U(X, Y) = (\mathbf{X}, \mathbf{Y})$

Przykład

- Niech G będzie symetrią względem osi Ox
- Niech H obrotem dookoła środka współrzędnych o kąt $90°$ zgodnie ze wskazuwką zegara.
- $G(x, y) = (x, -y)$, macierz $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
- $H(x, y) = (y, -x)$, macierz $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
- Macierz $GH = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Macierz iloczynu przekształceń

- $\mathbf{X} = AX + BY = A(ax + by) + B(cx + dy) = (Aa + Bc)x + (Ab + Bd)y$
- $\mathbf{Y} = CX + DY = C(ax + by) + D(cx + dy) = (Ca + Dc)x + (Cb + Dd)y$
- $\begin{pmatrix} Aa + Bc & Ab + Bd \\ Ca + Dc & Cb + Dd \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix}$

Wektory n-wymiarowe

- Zmiana oznazceń
- $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Obrót

- Niech R_θ będzie obrotem o kąt θ.
- Macierz $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.
- Niech R_φ będzie obrotem o kąt φ.
- Macierz $R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.
- Iloczyn obrotów $R_\theta R_\varphi = R_{\theta+\varphi}$
- Macierz $R_{\theta+\varphi} = \begin{pmatrix} \cos(\theta+\varphi) & -\sin(\theta+\varphi) \\ \sin(\theta+\varphi) & \cos(\theta+\varphi) \end{pmatrix}$

Dodawanie wektorów

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z \\ z+t \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}$$

Obrót

- Iloczyn macierzy

$$R_\theta R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi & -\cos\theta\sin\varphi - \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\cos\varphi \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta+\varphi) & -\sin(\theta+\varphi) \\ \sin(\theta+\varphi) & \cos(\theta+\varphi) \end{pmatrix}.$$

- Wniosek:
  - $\cos(\theta+\varphi) = \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi$,
  - $\sin(\theta+\varphi) = \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi$.

Mnożenie macierzy przez wektor

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

$$\leadsto \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}$$

$$\leadsto \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}$$

Mnożenie wektorów przez $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix}$$

$$\leadsto \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{pmatrix}$$

$$\leadsto \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$$

Wygodne oznaczenie dla sumy

- $x_1 + \cdots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$

Macierze n-wymiarowe

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \leadsto \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\leadsto \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Przestrzeń wektorowa. Skalowanie

- Skalowanie jest *rozdzielne względem dodawania wektorów:*
  - $\forall \lambda \in \mathbb{R}\ X, Y \in \mathcal{X}$ zachodzi $\alpha(X+Y) = \alpha X + \alpha Y$
- Skalowanie jest *rozdzielne względem dodawania liczb:*
  - $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ X \in \mathcal{X}$ jest $(\alpha + \beta)X = \alpha X + \beta X$
- Skalowanie jest zgodne z mnożeniem liczb:
  - $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ X \in \mathcal{X}$ jest $\alpha(\beta X) = (\alpha\beta)X$
- $\forall X \in \mathcal{X}$ jest $1 \cdot X = X$.

Abstrakcyjna przestrzeń wektorowa

- Zbiór $\mathcal{X}$, na którym określone są dwa dzalania
  - dodawanie
$$+ : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$$
$$(X, Y) \mapsto X + Y$$
  - mnożenie przez liczbę rzeczywistą (skalowanie)
$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$$
$$(\alpha, X) \mapsto \alpha \cdot X (= \alpha X)$$
  - nawyza się *przestrzenią wektorową (liniową)*, jeżeli spełnione są warunki:

Przestrzeń wektorowa. Przykłady

- $\mathbb{R}^n$
- Wielomiany $\mathbb{R}[x]$
- Wielomiany dwóch zmiennych $\mathbb{R}[x, y]$
- Szeregi potęgowe $\mathbb{R}[[x]]$
  - $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$

Przestrzeń wektorowa. Dodawanie

- Dodawanie wektorów jest *łączne:*
  - $\forall X, Y, Z \in \mathcal{X}$ zachodzi $(X+Y)+Z = X+(Y+Z)$
- Dodawanie wektorów jest *przemienne:*
  - $\forall X, Y \in \mathcal{X}$ jest $X + Y = Y + X$
- Dodawanie wektorów ma element *neutralny:*
  - $\exists 0 \in \mathcal{X}$, nazywany *wektorem zerowym,* że $X + 0 = X$ dla dowolnego $X \in \mathcal{X}$.
- Dodawanie wektorów pozwala na *odejmowanie:*
  - $\forall X \in \mathcal{X}$ istnieje element $X' \in \mathcal{X}$, nazywany *wektorem przeciwnym do* X, taki, że $X + X' = 0$ (wygodne oznaczenie: $X' = -X$).

Google — podejście algebraiczne

- Macierz hiperlinków H:

$$h_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{l_j}, & \text{jeżeli } p_j \in B_i \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}$$

  - $h_{ij} > 0$
  - $\sum_i h_{ij} = 1$
  - H jest macierzą *stochastyczną*
- Wektor ważności $W = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$

Przekształcenia liniowe

- Przekształcenie $L : \mathcal{X} \to \mathcal{X}, \quad X \mapsto L(X) = LX$ nazywa się *liniowym*, jeżeli:
  - $\forall X, Y \in \mathcal{X}$ spełniono jest $L(X+Y) = LX + LY$
  - $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall X \in \mathcal{X}$ spełniono jest $L(\alpha X) = \alpha LX$

Google — Równanie ważności

- $W_i = \sum_{P_j \in B_i} \frac{W_j}{l_j} = \sum_{j=1}^{n} h_{ij} W_j$
- Równanie ważności $W = HW$
- W jest wektorem *stacjonarnym* przekształcenia H
- Dla stochastycznej macierzy istnieje jednoznacznie określony wektor stacjonarny o dodatnich współrzędnych

Google

- Uporządkować strony (wyniki wyszukiwania)
- Ważność strony P jest $W(P)$
- Niech strona P_j ma l_i odnośników
- Jeżeli P_j ma link na P_i, strona P_j przekazuje $W(P_j)/l_j$ swojej ważności na P_i
- Ważność P_i wyniesie

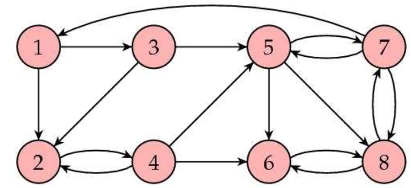
$$W(P_i) = \sum_{P_j \in B_i} \frac{W(P_j)}{l_j},$$

gdzie B_i jest zbiorem stron z odnośnikami do P_i

Literatura

[1] IAN STEWART: Concepts of Modern Mathematics, Penguin Books, 1975.

[2] DAVID AUSTIN: How Google Finds Your Needle in the Web's Haystack, *AMS Feature Column,* December 2006, `http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-pagerank`.



$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$W = \begin{pmatrix} 0{,}0600 \\ 0{,}0675 \\ 0{,}0300 \\ 0{,}0675 \\ 0{,}0975 \\ 0{,}2025 \\ 0{,}1800 \\ 0{,}2950 \end{pmatrix}$$