Spotkania z Matematyką

Cała prawda o powierzchniach

Aleksander Denisiuk

denisjuk@matman.uwm.edu.pl

Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie

Wydział Matematyki i Informatyki

ul. Słoneczna 54, pok. E1/7

10-561 Olsztyn

Cała prawda o powierzchniach

Najnowsza wersja tego dokumentu dostępna jest pod adresem

http://wmii.uwm.edu.pl/~denisjuk/uwm/

Topologia

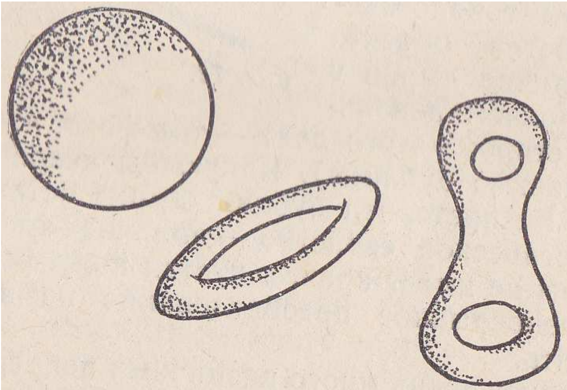
- Właściwości geometryczne, niezmiennicze przy ciągłych deformacjach
- Można:
  - rozciągać
  - giąć
- Nie można:
  - rozcinać
  - złamać
- Jednak można rozciąć wzdłuż linii, a potem skleić wzdłuż tejże linii:
  - rozwiązać supeł

Właściwości nietopologiczne

- prostolinijność
- prostokątność
- trójkątność

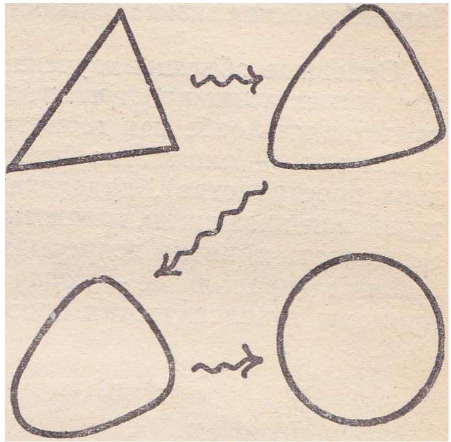
Przestrzenie topologiczne

- zbiory matematyczne z określoną dodatkową strukturą, *topologią*, która pozwala określić pojęcie ciągłości
- powierzchnie



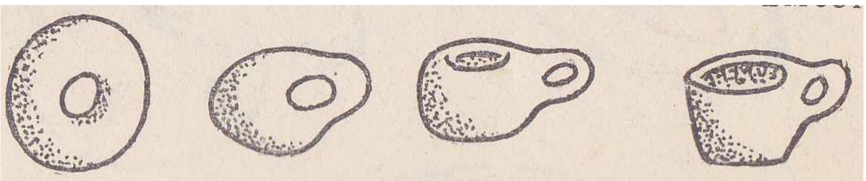
Trójkąt i okrąg

- Trójkąt i okrąg są równoważne topologicznie



Równoważność topologiczna

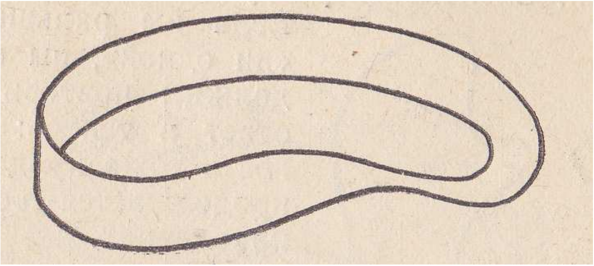
- można przejść od jednej przestrzeni do drugiej i z powrotem za pomocą ciągłej deformacji
- pączek (torus) jest równoważny *(homeomorficzny)* z filiżanką



Właściwości topologiczne

- krawędź:
  - sfera nie ma krawędzi
  - półsfera ma
- dziurka pączka
  - zwróć uwagę: dziurka nie należy do pączka!

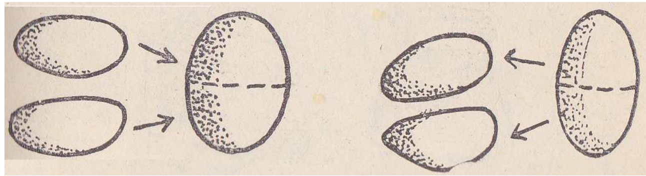
Wstęga Möbiusa



- nie jest homeomorficzna z wstęgą cylindryczną (powierzchnią walca):
  - ma tylko jedną krawędź

Równoważność topologiczna

- $f : A \to B$ jest *równoważnością topologiczną (homeomorfizmem),* jeżeli
  - f jest bijekcją
  - f jest ciągłe
  - odwzorowanie odwrotne do f też jest ciągłe
- sklejanie dwóch kawałków gliny nie jest równoważnością topologiczną:

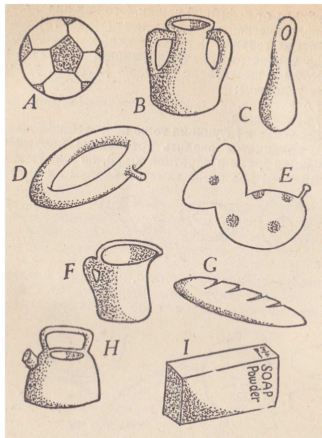


Wstęga Möbiusa. Ilość boków

- wstęga Möbiusa ma tylko jeden bok: nie można pokolorować w dwa kolory
  - czy ilość boków jest wewnętrzną właściwością topologiczną?
  - czy nie zależy od zagnieżdżenia do przestrzeni?
  - ile boków ma nasza przestrzeń?

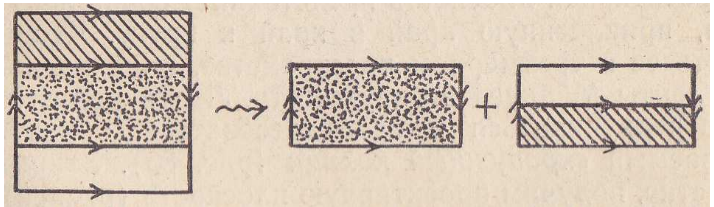
Przykład

- podziel powierzchnie na klasy homeomorficznych:

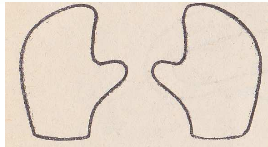


Butelka Kleina a wstęga Möbiusa

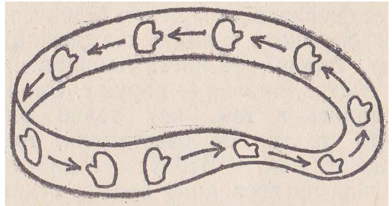
- butelkę Kleina można skleić z dwóch wstęg Möbiusa:



Wstęga Möbiusa. Orientacja



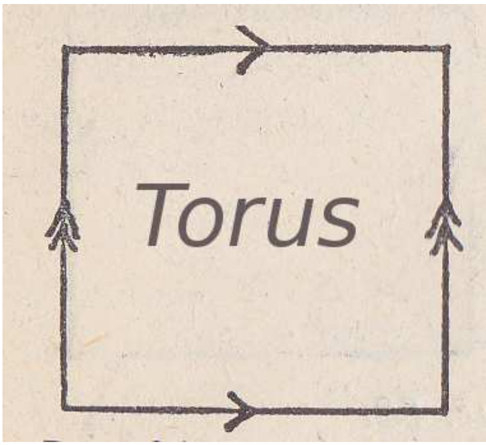
- powierzchnia nieorientowalna



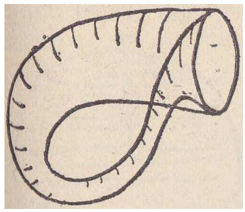
- orientowalność jest wewnętrzną właściwością topologiczną

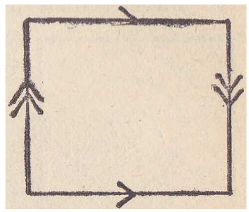
Torus

- można skleić z kwadratu:

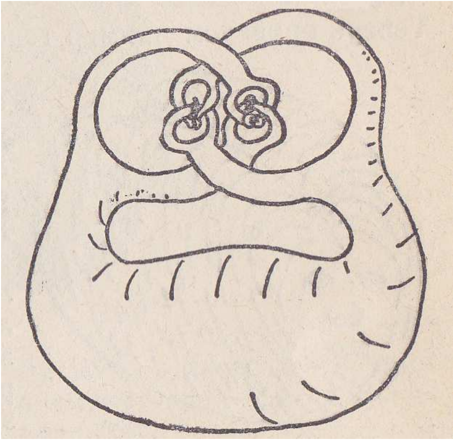


Butelka Kleina

- nie ma krawędzi: 
- jest nieorientowalna
- można skleić z kwadratu:



Rogata sfera Alexandera

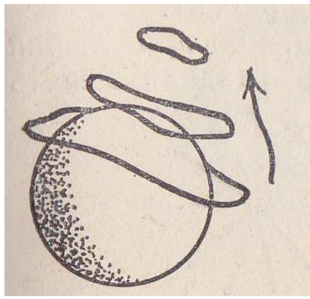


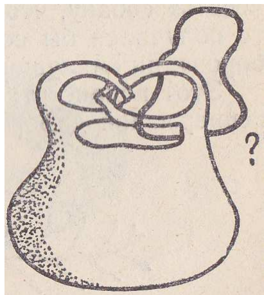
- homeomorficzna ze sferą

Płaszczyzna rzutowa

Rogata sfera Alexandera

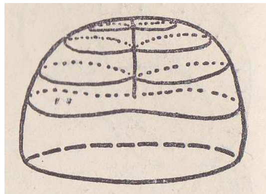
- obszar przestrzeni na zewnątrz rogatej sfery Alexandera nie jest homeomorficzny z obszarem na zewnątrz zwykłej sfery



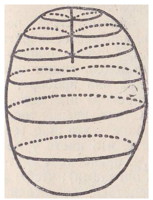


Płaszczyzna rzutowa a wstęga Möbiusa

- skleić po krawędzi koło i wstęgę Möbiusa
  - zrobić krawędź wstęgi okręgiem:

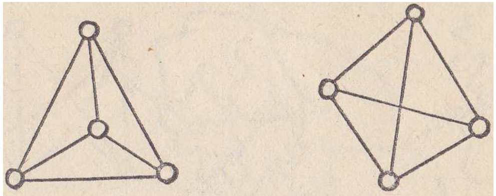


  - dokleić koło

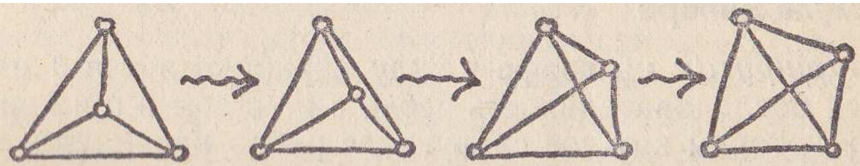


Grafy

- wierzchołki, krawędzie, obrazek grafu:

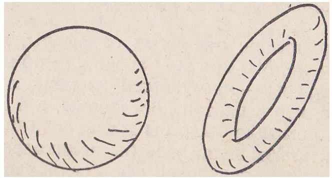


-



Niezmienniki topologiczne

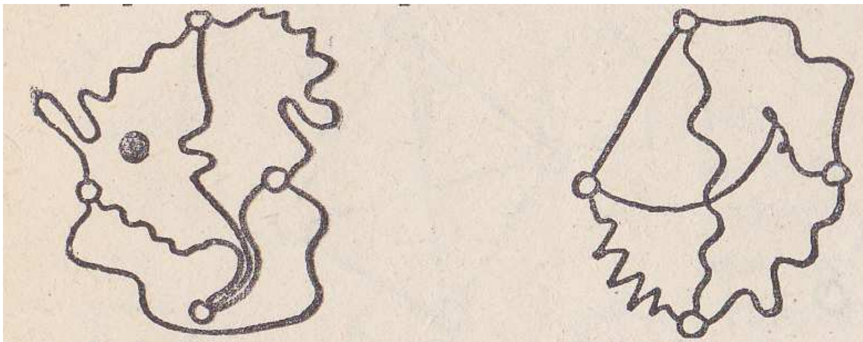
- aby udowodnić, że powierzchnie są homeomorficzne, wystarczy ustalić między nimi homeomorfizm
- jak udowodnić, że powierzchnie nie są homeomorficzne?



- trzeba znaleźć niezmienniki topologiczne, które odróżniają te dwie powierzchnie
  - dziura w torusie jest częścią obszaru poza torusem

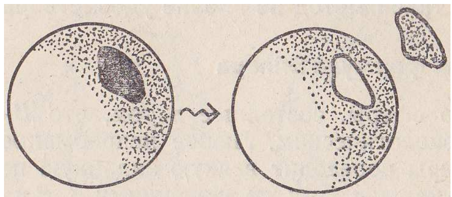
Struktura topologiczna grafu

-

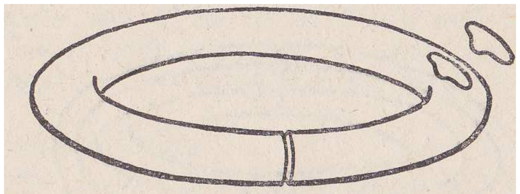


Torus i sfera

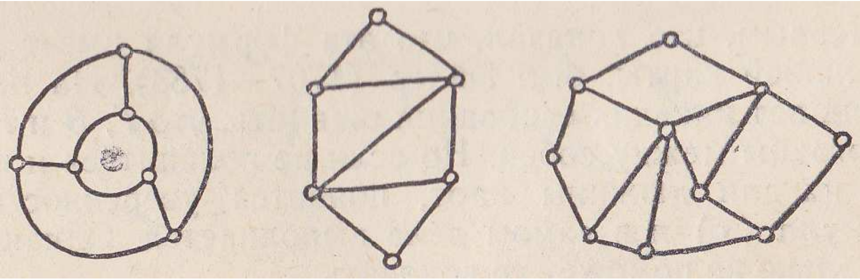
- każda domknięta krzywa na sferze dzieli ją na dwie części:



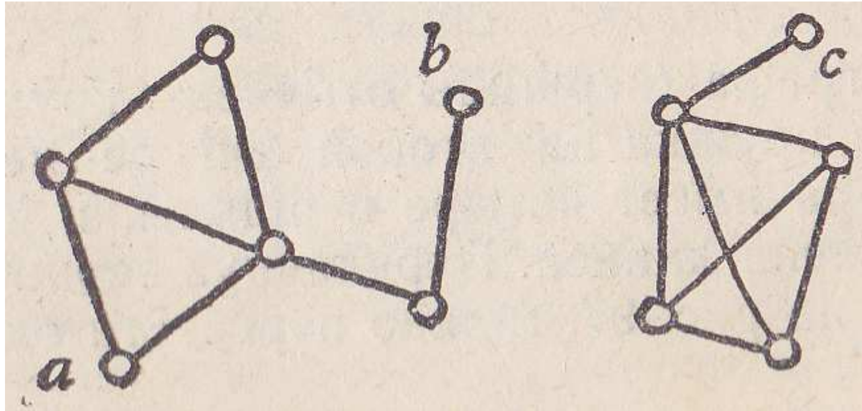
- na torusie są domknięte krzywe, które nie dzielą torusa:



Graf planarne, przykłady



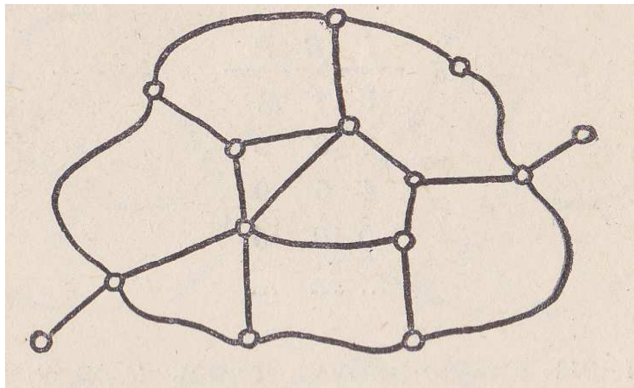
Grafy spójne



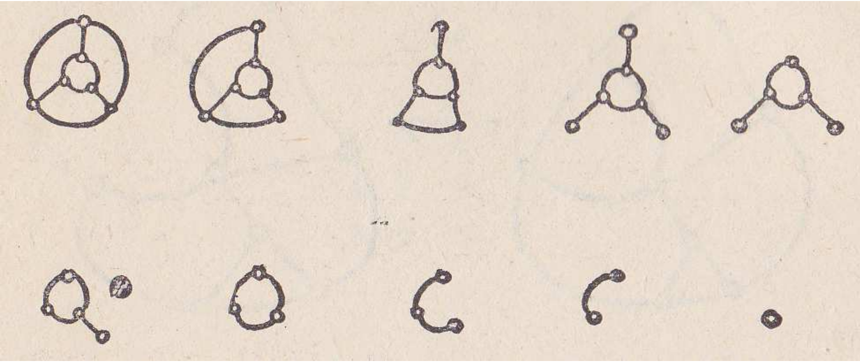
Wzór Eulera

$$W + S - K = 1$$

Grafy planarne, ściany

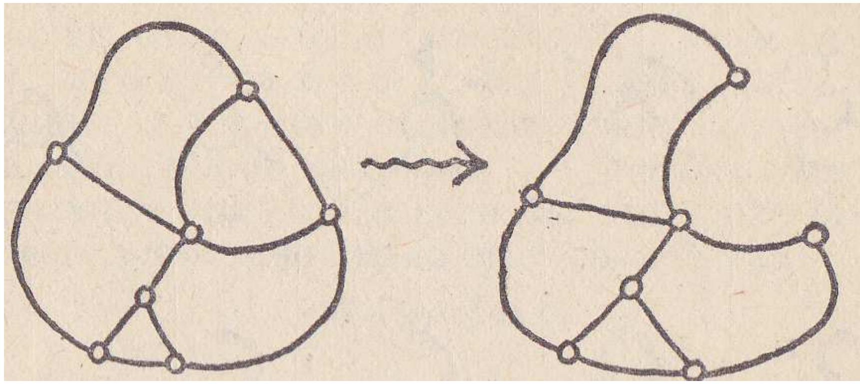


Dowód wzoru Eulera



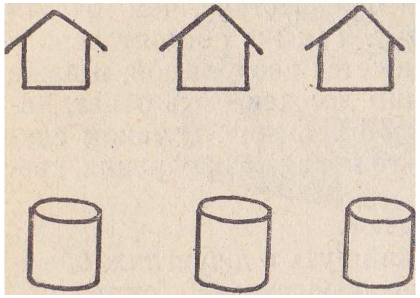
- $W + S - K$ jest niezmiennicze (czyli jeden)

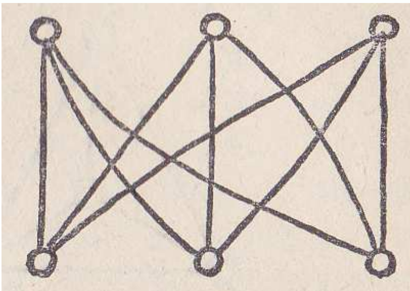
Usunąć krawędź



- $W + S - K$ jest niezmiennicze

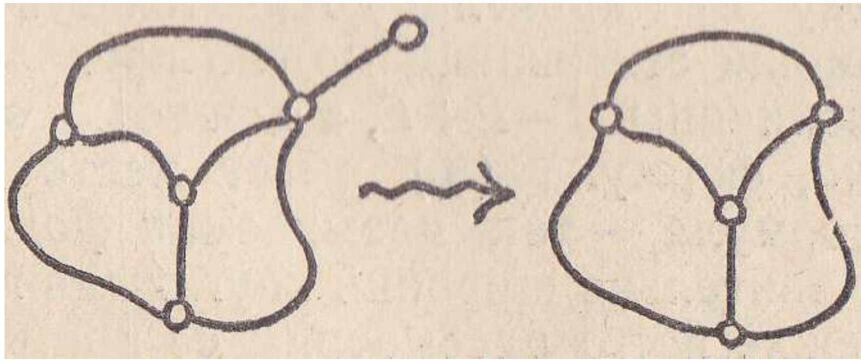
Domki i studnie





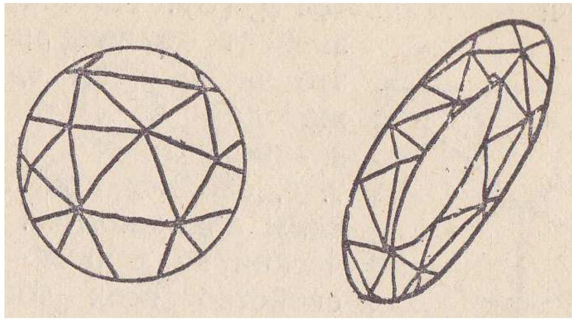
- Ma być 9 ścian
- Sprawdź, że to jest niemożliwe

Usunąć wierzchołek



- $W + S - K$ jest niezmiennicze

Triangulacja

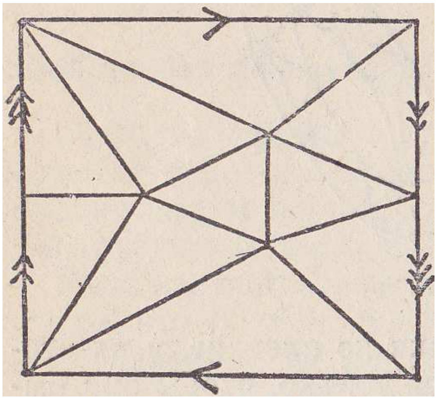


- *powierzchnia* = triangulowalna, spójna przestrzeń topologiczna, bez krawędzi
  - sfera, torus, butelka Kleina, płaszczyzna rzutowa
  - wstęga Möbiusa, płaszczyzna — nie

Wzór Eulera na sferze

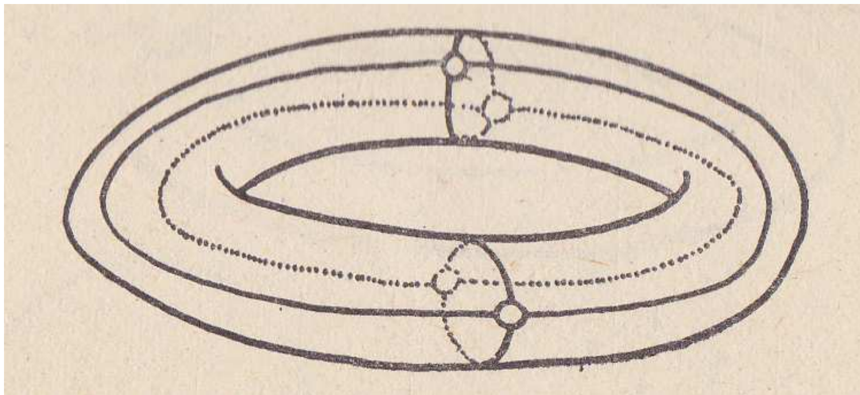
- $W + S - K = 2$
- Wzór Eulera jest niezmiennikiem topologicznym

Triangulacja płaszczyzny rzutowej



- $W + S - K = 1$

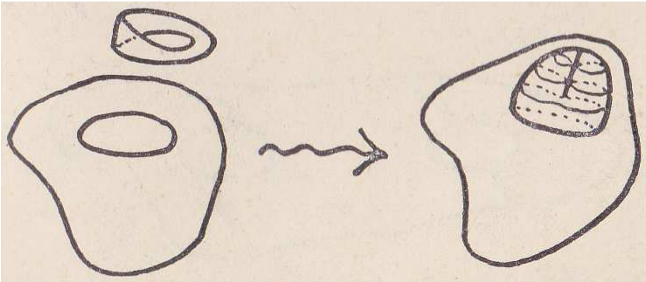
Wzór Eulera na torusie



- $W + S - K = 0$

Doklejanie wstęgi Möbiusa

- standardowa nieorientowalna powierzchnia rodzaju n to jest sfera z doklejonymi n wstęgami Möbiusa
- płaszczyzna rzutowa, butelka Kleina, etc

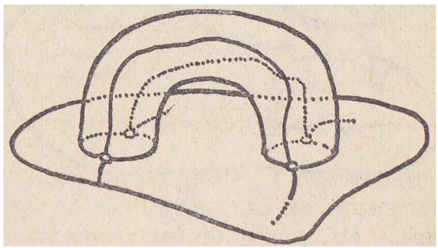


Niezmienniki topologiczne

1. charakterystyka Eulera $\chi(P) = W + S - K$
2. orientowalność

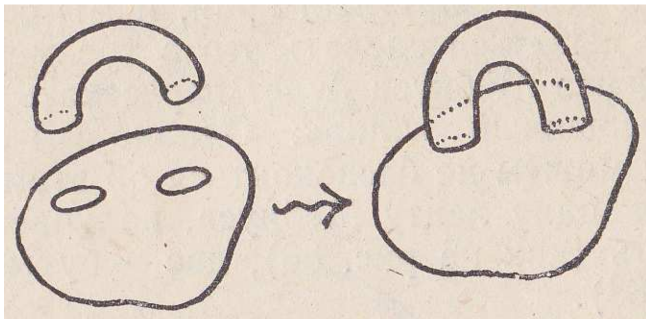
P	$\chi(P)$	orientowalna?
sfera	2	tak
torus	0	tak
torus podwójny	-2	tak
płaszczyzna rzutowa	1	nie
butelka Kleina	0	nie

$\chi(P)$ dla orientowalnych powierzchni

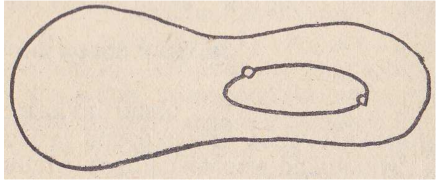
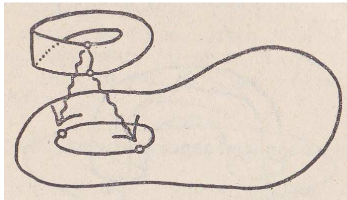
- 
- po doklejaniu rączki $\chi(P)$ zmniejszy się o dwa.
- 
- dla powierzchni rodzaju n: $\chi(P) = 2 - 2n$

Doklejanie rączki

- standardowa orientowalna powierzchnia rodzaju n (genus n) to jest sfera z doklejonymi n rączkami
- sfera, torus, podwójny torus, etc



Powierzchnie nieorientowalne

- 
- po doklejaniu wstęgi Möbiousa $\chi(P)$ zmniejszy się o 1.
- 
- dla powierzchni rodzaju n: $\chi(P) = 2 - n$

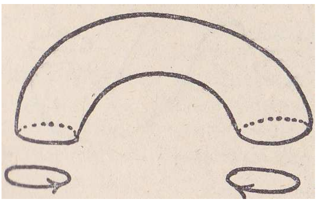
Klasyfikacja powierzchni

- $\chi(P)$ oraz orientowalność rozróżniają standardowe powierzchnie
  - w szczególności, wszystkie standardowe powierzchnie nie są homeomorficzne
- **Twierdzenie.** *Każda powierzchnia jest homeomorficzna z jedną ze standardowych powierzchni*
- Dowód:
  - rozetniemy powierzchnię na kawałki
  - skleimy kawałki z powrotem, aby wynik został homeomorficzny z powierzchnią pierwotną, otrzymamy powierzchnię standardową

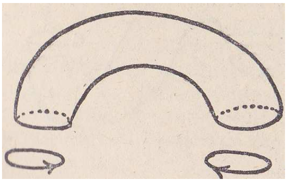
Rozcinamy

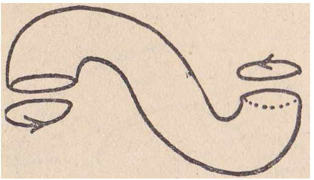
- znajdźmy domkniętą krzywą na powierzchni, która nie dzieli powierzchni na dwie części
  - jeżeli takiej krzywej nie ma, to się zatrzymamy
- wąski pasek powierzchni po obu bokach od takiej krzywej jest homeomorficzny z paskiem ze sklejonymi krawędziami
  - a więc to jest:
    - walec
    - lub wstęga Möbiusa

Jeżeli pasek jest walcem

- wycinamy pasek, a w miejsce dziur wklejamy po kółeczku
- 
- zaznaczamy strzałką kierunek, aby poprawnie wkleić z powrotem

Sklejanie. Trzy operacje

1. dane są dwa kółka o przeciwnych kierunkach: dokleić rączkę 
2. dane jest jedno kółko: dokleić wstęgę Möbiusa
3. dane są dwa kółka o zgodnych kierunkach: dokleić butelkę Kleina (czyli dwa razy operacja 2)



Jeżeli pasek jest wstęgą Möbiusa

- wycinamy pasek, a w miejsce jednej dziury wklejamy kółeczko
- charakterystyka Eulera się zwiększa o jeden

Powierzchnia orientowalna

- potrzebne są tylko doklejania rączek
- wynik będzie sferą z rączkami
- wynik będzie homeomorficznym z powierzchnią pierwotną

Dwa twierdzenia

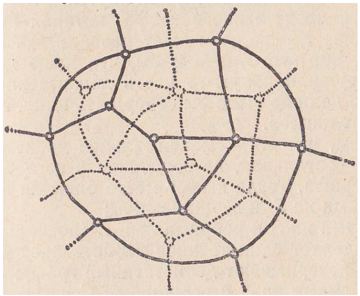
Twierdzenie A Charakterystyka Eulera dowolnej powierzchni nie jest większa od 2

Twierdzenie B Jeżeli każda domknięta krzywa na powierzchni dzieli tę powierzchnię na dwa kawałki, to taka powierzchnia jest homeomorficzna ze sferą

- *Wniosek:* w wyniku rozcięcia dojdziemy do sfery

Dualna mapa triangulacji

- powierzchnia S jest triangulowalna
- określmy dla triangulacji *mapę dualną,* jak na obrazku

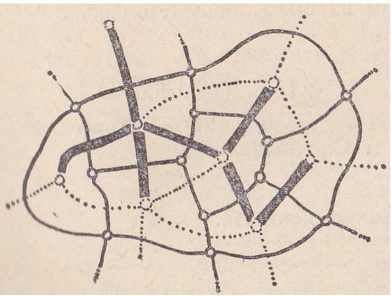


Powierzchnia nieorientowalna

- potrzebna jest przynajmniej jedna operacja 2 (doklejanie wstęgi Möbiusa)
- operację 3 zamieniamy na dwie operacje 2
- w przypadku dwóch kółek przeciwnie zorientowanych:
  - obnieść jedno kółko dookoła wstęgi Möbiusa
  - orientacja się zmieni
  - mamy dwa kółka zgodnie zorientowane
    - jedna operacja 3
    - czyli dwie operacje 2
- wynik będzie sferą z wstęgami Möbiusa
- wynik będzie homeomorficznym z powierzchnią pierwotną

Maksymalne dualne drzewo

- drzewo z dualnych wierzchołków
- nie można rozszerzyć, aby zostało drzewem



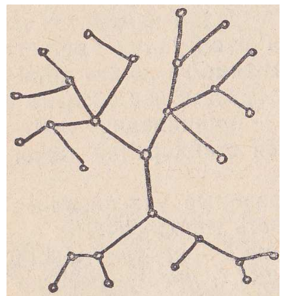
- maksymalne dualne drzewo zawiera wszystkie dualne wierzchołki

Dowód twierdzenia A. χ grafu

- charakterystyka Eulera *grafu* N:

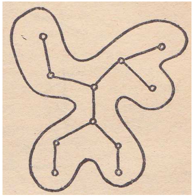
$$\chi(N) = W - K$$

- sam graf nie ma ścian
- $\chi(N) \leq 1$ (dla spójnego grafu)
  - sprowadzamy do *drzewa*
  - ściągamy do jednego wierzchołka



Dowód twierdzenia B

- otoczenie drzewa jest homeomorficzne z kołem



- podzielmy P na dwie części
  - X — zbiór punktów, bliższych do M
  - Y — zbiór punktów, bliższych do C
- X i Y są homeomorficzne z kołem
- P jest sklejaniem X i Y, czyli sferą

Dowód twierdzenia A

- niech M będzie maksymalnym dualnym drzewem, a C — *uzupełnieniem,* zbiorem wierzchołków i krawędzi triangulacji, nie przecinających M
  - C jest spójnym grafem
  - $W(P) \leftrightarrow W(C)$
  - $S(P) \leftrightarrow W(M)$
  - $K(P) \leftrightarrow K(M) \cup K(C)$
- $\chi(P) = \chi(M) + \chi(C) \leq 2$

Dowód twierdzenia B. $\chi(P) = 2$

- $\chi(P) = \chi(M) + \chi(C)$
- Załóżmy że $\chi(P) \neq 2 \Rightarrow \chi(C) \neq 1 \Rightarrow C$ nie jest drzewem
- więc C zawiera cykl
- cykl dzieli P na dwie części
- każda z tych części zawiera wierzchołek mapy dualnej
- te dwa wierzchołki można połączyć ścieżką z M
- taka ścieżka przetnie C
- a więc $\chi(C) = 1$ oraz C też jest drzewem