

# **Wprowadzenie do grafiki maszynowej. Wprowadzenie do Animacji. Sterowanie ruchem**

Aleksander Denisiuk  
Uniwersytet Warmińsko-Mazurski  
Olsztyn, ul. Słoneczna 54  
[denisjuk@matman.uwm.edu.pl](mailto:denisjuk@matman.uwm.edu.pl)

# ***Wprowadzenie do Animacji. Sterowanie ruchem***

Zagadnienie  
Interpolacji

---

Sterowanie Ruchem

---

Animacja Orientacji

---

Wykorzystanie  
Ścieżek

---

Najnowsza wersja tego dokumentu dostępna jest pod adresem

<http://wmii.uwm.edu.pl/~denisjuk/uwm>

Zagadnienie  
Interpolacji

❖ Zagadnienie  
interpolacji

Sterowanie Ruchem

Animacja Orientacji

Wykorzystanie  
Ścieżek

# Zagadnienie Interpolacji

# *Zagadnienie interpolacji*

Zagadnienie  
Interpolacji

❖ Zagadnienie  
interpolacji

Sterowanie Ruchem

Animacja Orientacji

Wykorzystanie  
Ścieżek

- Dane są wartości parametrów w klatkach kluczowych
  - ◆ współrzędne położenia, kąt nachylenia, obrót ręki robota, etc
- Określić wartości w klatkach pośrednich
  - ◆ rozpędzanie i spowalnianie, ciągłość

# Interpolacja a aproksymacja

Zagadnienie  
Interpolacji

❖ Zagadnienie  
interpolacji

Sterowanie Ruchem

Animacja Orientacji

Wykorzystanie  
Ścieżek

- Interpolacja: krzywe przechodzą dokładnie przez punkty
  - ✦ krzywe sklejane, interpolacja Hermite'a
- Aproksymacja: dane są punkty kontrolne
  - ✦ krzywe Béziera, B-sklejane



# Złożoność funkcji

Zagadnienie  
Interpolacji

❖ Zagadnienie  
interpolacji

Sterowanie Ruchem

Animacja Orientacji

Wykorzystanie  
Ścieżek

- Wielomiany trzeciego stopnia
  - ◆ można podawać położenia i prędkości punktów końcowych
- Wielomiany niższego stopnia
  - ◆ nie mają punktów przegięcie
  - ◆ krzywe są płaskie
- Wielomiany wyższego stopnia
  - ◆ nie dają istotnych korzyści
  - ◆ są bardziej skomplikowane obliczeniowo

# Ciągłość

Zagadnienie  
Interpolacji

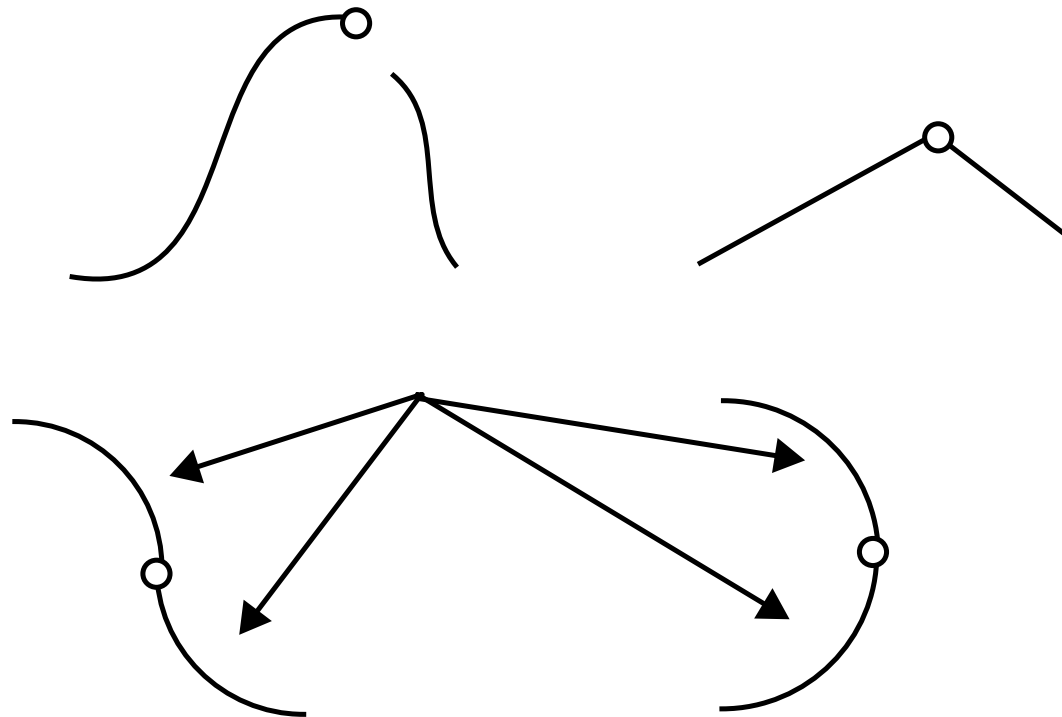
❖ Zagadnienie  
interpolacji

Sterowanie Ruchem

Animacja Orientacji

Wykorzystanie  
Ścieżek

- Ciągłość zerowego rzędu
- Ciągłość pierwszego rzędu: ciągły kierunek stycznej (prędkość)
- Ciągłość drugiego rzędu: ciągła krzywizna (przyśpieszenie)



# Globalna i lokalna kontrola kształtu

Zagadnienie  
Interpolacji

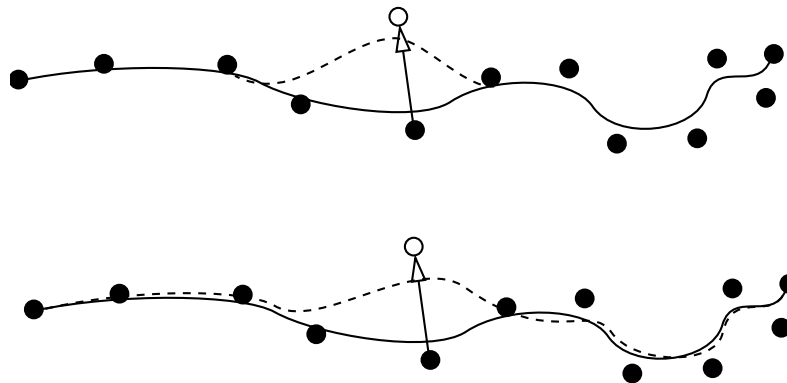
❖ Zagadnienie  
interpolacji

Sterowanie Ruchem

Animacja Orientacji

Wykorzystanie  
Ścieżek

- Kontrola lokalna
  - ✦ zmiana jednego punktu ma wpływ na ograniczoną część
    - splajny Catmulla-Roma, B-spline
- Kontrola globalna
  - ✦ zmiana jednego punktu ma wpływ na całą krzywą
    - interpolacja Lagrange'a





Zagadnienie  
Interpolacji

---

## Sterowanie Ruchem

- ❖ Sterowanie ruchem
- ❖ Obliczanie długości łuku
- ❖ Metody numeryczne
- ❖ Sterowanie prędkością
- ❖ Rozpędzanie i zatrzymanie
- ❖ Ogólne funkcje odległości

Animacja Orientacji

---

Wykorzystanie  
Ścieżek

---

# Sterowanie Ruchem

# Sterowanie ruchem punktu wzdłuż krzywej

Zagadnienie  
Interpolacji

Sterowanie Ruchem

❖ Sterowanie  
ruchem

❖ Obliczanie  
długości łuku

❖ Metody  
numeryczne

❖ Sterowanie  
prędkością

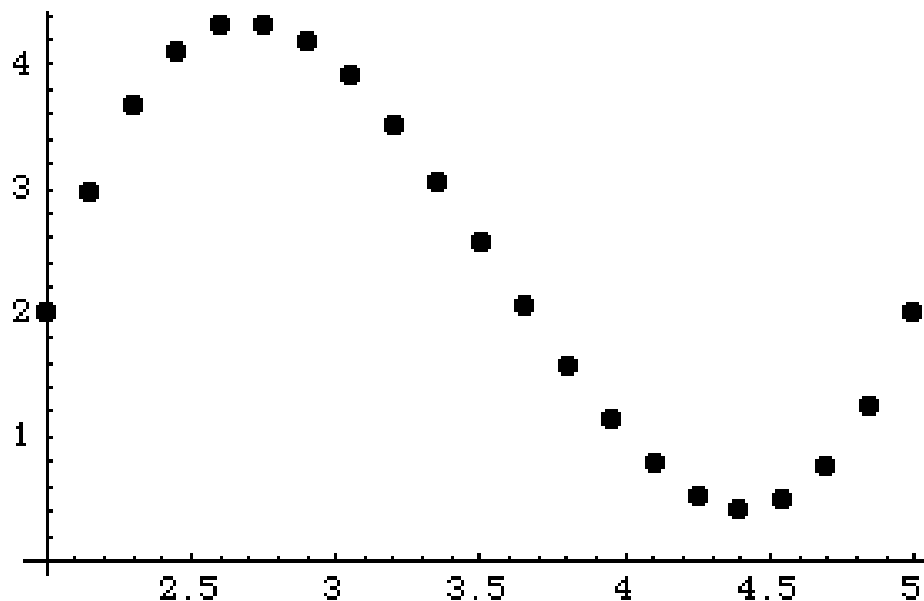
❖ Rozpędzanie  
i zatrzymanie

❖ Ogólne funkcje  
odległości

Animacja Orientacji

Wykorzystanie  
Ścieżek

- Określona jest funkcja interpolacyjna  $P(u) \in \mathbb{R}^3$ 
  - ✦ równomierna zmiana parametru  $u$  nie oznacza ruchu ze stałą prędkością
  - ✦ parametryzacja łukowa  $s = s(u)$ ,  $\text{length}(u_1, u_2)$



# Obliczanie analityczne

Zagadnienie  
Interpolacji

Sterowanie Ruchem

❖ Sterowanie  
ruchem

❖ Obliczanie  
długości łuku

❖ Metody  
numeryczne

❖ Sterowanie  
prędkością

❖ Rozpędzanie  
i zatrzymanie

❖ Ogólne funkcje  
odległości

Animacja Orientacji

Wykorzystanie  
Ścieżek

- $\text{length}(u_1, u_2) = \int_{u_1}^{u_2} |\dot{P}(u)| du =$   
 $\int_{u_1}^{u_2} \sqrt{\left(\frac{dx(u)}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy(u)}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz(u)}{du}\right)^2} du$ 
  - ◆ krzywa sześcienna
  - ◆ płaska krzywa kwadratowa

# Przybliżone obliczanie

Zagadnienie  
Interpolacji

Sterowanie Ruchem

❖ Sterowanie  
ruchem

❖ Obliczanie  
długości łuku

❖ Metody  
numeryczne

❖ Sterowanie  
prędkością

❖ Rozpędzanie  
i zatrzymanie

❖ Ogólne funkcje  
odległości

Animacja Orientacji

Wykorzystanie  
Ścieżek

- Dane są węzły  $u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_n$
- Obliczamy  $P(u_0), \dots, P(u_n)$
- Tablica odległości:
  - ◆  $G(0) = 0,$
  - ◆  $G(1) = \text{dist}(P_0, P_1),$
  - ◆  $G(2) = G(1) + \text{dist}(P_1, P_2),$
  - ◆ etc
- Dla oszacowania długości używana jest interpolacja liniowa
- $\text{length}(u_1, u_2) \approx G(u_2) - G(u_1)$

# Przykład

## Zagadnienie Interpolacji

### Sterowanie Ruchem

❖ Sterowanie ruchem

❖ Obliczanie długości łuku

❖ Metody numeryczne

❖ Sterowanie prędkością

❖ Rozpędzanie i zatrzymanie

❖ Ogólne funkcje odległości

### Animacja Orientacji

### Wykorzystanie Ścieżek

$i$	$u$	$G$
0	0,00	0,000
1	0,05	0,080
2	0,10	0,150
3	0,15	0,230
4	0,20	0,320
5	0,25	0,400
6	0,30	0,500
7	0,35	0,600
8	0,40	0,720
9	0,45	0,800
10	0,50	0,860

$i$	$u$	$G$
11	0,55	0,900
12	0,60	0,910
13	0,65	0,920
14	0,70	0,932
15	0,75	0,944
16	0,80	0,959
17	0,85	0,972
18	0,90	0,984
19	0,95	0,998
20	1,00	1,000

- $s(0,73) \approx 0,939$
- $u(0,75) \approx 0,41875$

# Błędy obliczeniowe

Zagadnienie  
Interpolacji

Sterowanie Ruchem

❖ Sterowanie  
ruchem

❖ Obliczanie  
długości łuku

❖ Metody  
numeryczne

❖ Sterowanie  
prędkością

❖ Rozpędzanie  
i zatrzymanie

❖ Ogólne funkcje  
odległości

Animacja Orientacji

Wykorzystanie  
Ścieżek

- Gęstsze tablicowanie
- Interpolacja wyższego rzędu
- Adaptacja

$$\left| \|P(0) - P(1)\| - \left( \|P(0) - P\left(\frac{1}{2}\right)\| + \left\| P\left(\frac{1}{2}\right) - P(1) \right\| \right) \right| < \varepsilon$$

# Całkowanie numeryczne

Zagadnienie  
Interpolacji

Sterowanie Ruchem

❖ Sterowanie  
ruchem

❖ Obliczanie  
długości łuku

❖ Metody  
numeryczne

❖ Sterowanie  
prędkością

❖ Rozpędzanie  
i zatrzymanie

❖ Ogólne funkcje  
odległości

Animacja Orientacji

Wykorzystanie  
Ścieżek

- Kwadratura Gaussa  $\int_{-1}^1 f(u) du \approx \sum_i w_i f(i)$
- Dowolny przedział
- Adaptacja

# Rozwiązywanie równań

Zagadnienie  
Interpolacji

Sterowanie Ruchem

❖ Sterowanie  
ruchem

❖ Obliczanie  
długości łuku

❖ Metody  
numeryczne

❖ Sterowanie  
prędkością

❖ Rozpędzanie  
i zatrzymanie

❖ Ogólne funkcje  
odległości

Animacja Orientacji

Wykorzystanie  
Ścieżek

- $\text{length}(u_0, u) = s$
- Metoda Newtona  $f(t) = 0$

$$t_{n+1} = t_n - \frac{f(t_n)}{f'(t_n)}$$

- Metoda siecznych
- Wyszukiwanie binarne



# Sterowanie prędkością

Zagadnienie  
Interpolacji

Sterowanie Ruchem

❖ Sterowanie  
ruchem

❖ Obliczanie  
długości łuku

❖ Metody  
numeryczne

❖ Sterowanie  
prędkością

❖ Rozpędzanie  
i zatrzymanie

❖ Ogólne funkcje  
odległości

Animacja Orientacji

Wykorzystanie  
Ścieżek

- $s(t)$ , gdzie  $t$  — czas
- Ruch ze stałą prędkością
  - ◆  $s(t)$  jest funkcją liniową
- ease-in/ease-out
  - ◆  $P(u(s(t)))$
- Funkcja odległości powinna być monotoniczna
- Funkcja odległości powinna być ciągła
- Normalizacja:  $s \in [0, 1]$ ,  $t \in [0, 1]$

# $\sin t$

Zagadnienie  
Interpolacji

Sterowanie Ruchem

❖ Sterowanie  
ruchem

❖ Obliczanie  
długości łuku

❖ Metody  
numeryczne

❖ Sterowanie  
prędkością

❖ Rozpędzanie  
i zatrzymanie

❖ Ogólne funkcje  
odległości

Animacja Orientacji

Wykorzystanie  
Ścieżek

- $s(t) = \text{ease}(t) = \frac{\sin\left(\pi t - \frac{\pi}{2}\right) + 1}{2}$

# Fragmenty funkcji sinusoidalnej

Zagadnienie  
Interpolacji

Sterowanie Ruchem

❖ Sterowanie  
ruchem

❖ Obliczanie  
długości łuku

❖ Metody  
numeryczne

❖ Sterowanie  
prędkością

❖ Rozpędzanie  
i zatrzymanie

❖ Ogólne funkcje  
odległości

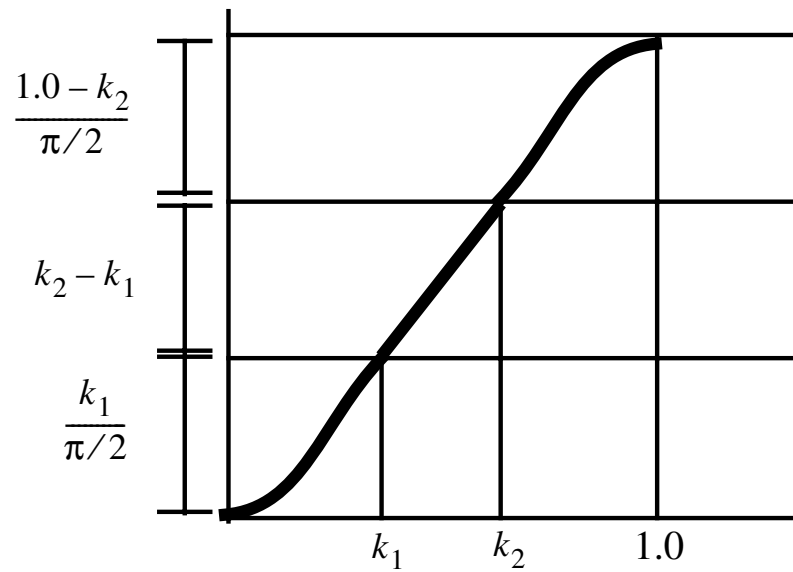
Animacja Orientacji

Wykorzystanie  
Ścieżek

●  $\text{ease}(t) =$

$$\begin{cases} \frac{2k_1}{\pi f} \left( \sin\left(\frac{\pi t}{2k_1} - \frac{\pi}{2}\right) + 1 \right), & \text{dla } t < k_1 \\ \left( \frac{2k_1}{\pi} + t - k_1 \right) / f, & \text{dla } k_1 \leq t < k_2 \\ \left( \frac{2k_1}{\pi} + k_2 - k_1 + \frac{2(1-k_2)}{\pi} \sin\left(\frac{\pi(t-k_2)}{2(1-k_2)}\right) \right) / f, & \text{dla } k_2 \leq t \end{cases}$$

gdzie  $f = 2k_1/\pi + k_2 - k_1 + 2(1 - k_2)/\pi$ .



# Wielomian trzeciego stopnia

Zagadnienie  
Interpolacji

---

Sterowanie Ruchem

---

❖ Sterowanie  
ruchem

❖ Obliczanie  
długości łuku

❖ Metody  
numeryczne

❖ Sterowanie  
prędkością

❖ Rozpędzanie  
i zatrzymanie

❖ Ogólne funkcje  
odległości

Animacja Orientacji

---

Wykorzystanie  
Ścieżek

---

- $\text{ease}(t) = -2t^3 + 3t^2$
- Styczne w końcach przedziału  $[0, 1]$  są poziome
- brak przedziału ze stałą prędkością

# Stałe przyspieszenie

Zagadnienie  
Interpolacji

Sterowanie Ruchem

❖ Sterowanie  
ruchem

❖ Obliczanie  
długości łuku

❖ Metody  
numeryczne

❖ Sterowanie  
prędkością

❖ Rozpędzanie  
i zatrzymanie

❖ Ogólne funkcje  
odległości

Animacja Orientacji

Wykorzystanie  
Ścieżek

$$\bullet \quad a(t) = \begin{cases} a_+ & \text{dla } 0 < t < t_1, \\ 0 & \text{dla } t_1 < t < t_2, \\ a_- & \text{dla } t_2 < t < 1. \end{cases}$$

$$\bullet \quad v(t) = \begin{cases} v_0 \frac{t}{t_1} & \text{dla } 0 < t < t_1, \\ v_0 & \text{dla } t_1 < t < t_2, \\ v_0 \left(1 - \frac{t-t_2}{1-t_2}\right) & \text{dla } t_2 < t < 1. \end{cases}$$

$$\bullet \quad s(t) = \begin{cases} v_0 \frac{t^2}{2t_1} & \text{dla } 0 < t < t_1, \\ v_0 \frac{t_1}{2} + v_0(t - t_1) & \text{dla } t_1 < t < t_2, \\ v_0 \frac{t_1^2}{2} + v_0(t - t_1) + v_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{t-t_2}{1-t_2}\right) (t - t_1) & \text{dla } t_2 < t < 1. \end{cases}$$

# Dopasowanie do danej prędkości

## Zagadnienie Interpolacji

### Sterowanie Ruchem

❖ Sterowanie ruchem

❖ Obliczanie długości łuku

❖ Metody numeryczne

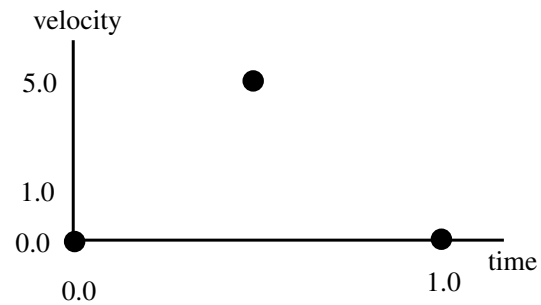
❖ Sterowanie prędkością

❖ Rozpędzanie i zatrzymanie

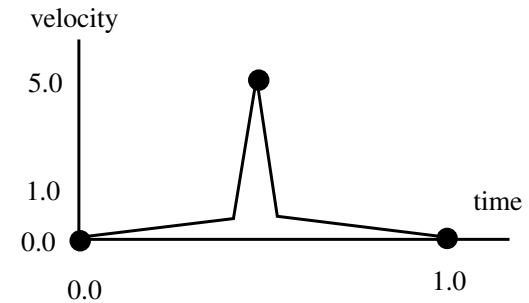
❖ Ogólne funkcje odległości

### Animacja Orientacji

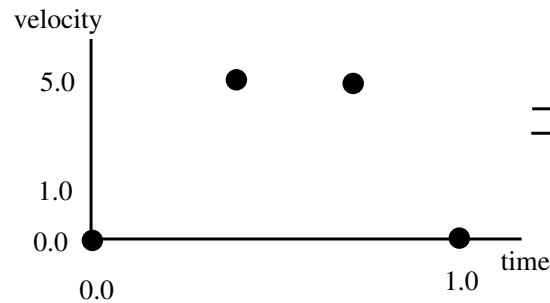
### Wykorzystanie Ścieżek



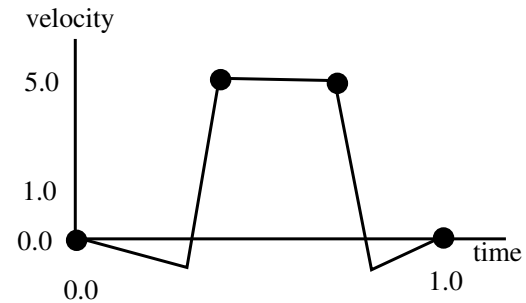
User specified velocities



Possible solution to enforce total distance covered equal to one



User specified velocities



Possible solution to enforce total distance covered (signed area under the curve) equal to one

# Przykłady funkcji odległości

## Zagadnienie Interpolacji

## Sterowanie Ruchem

❖ Sterowanie ruchem

❖ Obliczanie długości łuku

❖ Metody numeryczne

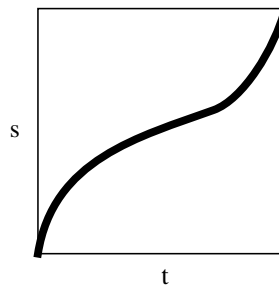
❖ Sterowanie prędkością

❖ Rozpędzanie i zatrzymanie

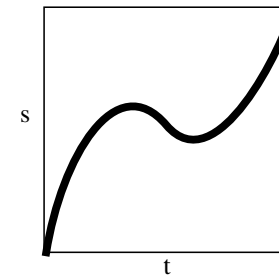
❖ Ogólne funkcje odległości

## Animacja Orientacji

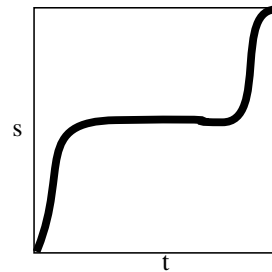
## Wykorzystanie Ścieżek



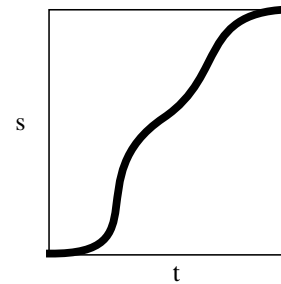
a) starts and ends abruptly



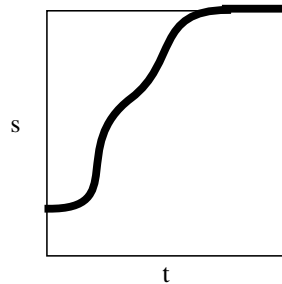
b) backs up



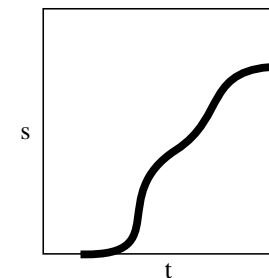
c) stalls



d) smoothly starts and stops



e) starts part way along the curve and gets to the end before  $t=1.0$



f) waits awhile before starting and doesn't get all the way to the end

# Warunki na ruch

Zagadnienie  
Interpolacji

Sterowanie Ruchem

❖ Sterowanie  
ruchem

❖ Obliczanie  
długości łuku

❖ Metody  
numeryczne

❖ Sterowanie  
prędkością

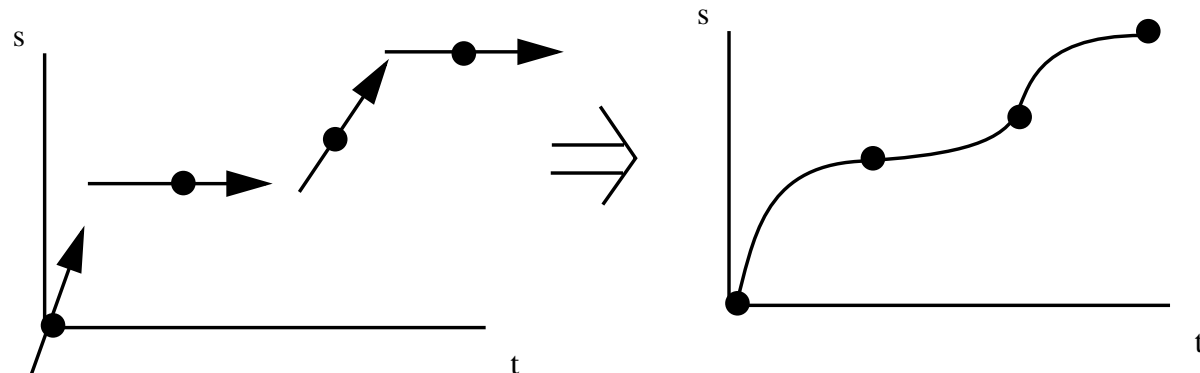
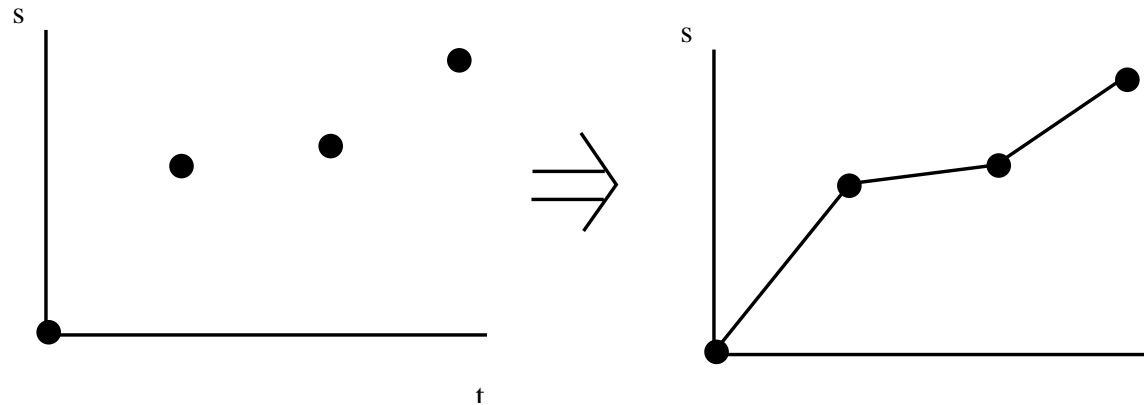
❖ Rozpędzanie  
i zatrzymanie

❖ Ogólne funkcje  
odległości

Animacja Orientacji

Wykorzystanie  
Ścieżek

●  $(t_i, s_i, v_i, a_i)$





# Dopasowanie do par położenie-czas

Zagadnienie  
Interpolacji

Sterowanie Ruchem

❖ Sterowanie  
ruchem

❖ Obliczanie  
długości łuku

❖ Metody  
numeryczne

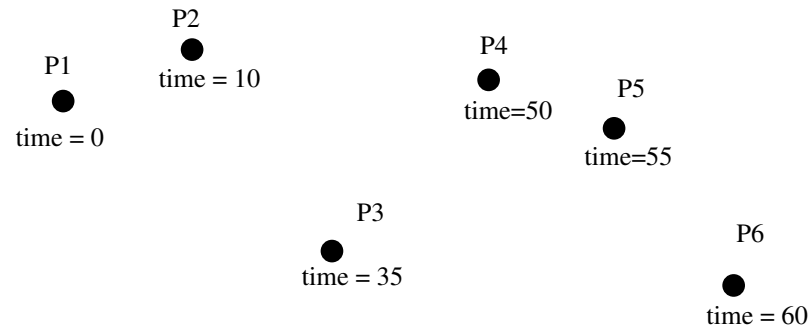
❖ Sterowanie  
prędkością

❖ Rozpędzanie  
i zatrzymanie

❖ Ogólne funkcje  
odległości

Animacja Orientacji

Wykorzystanie  
Ścieżek



- Warunki  $(P_i, t_i)$ ,  $i = 1, \dots, j$ .
- Krzywe B-sklejane  $P(t) = \sum_{l=1}^{n+1} B_l N_{l,k}(t)$ ,  
 $2 \leq k \leq n+1 \leq j$
- Układ  $P = NB$ 
  - ◆  $B = N^{-1}P$
- Regularyzacja
  - ◆  $N^T P = N^T N B$ 
    - $B = (N^T N)^{-1} N^T P$

Zagadnienie  
Interpolacji

---

Sterowanie Ruchem

---

**Animacja Orientacji**

- ❖ Macierz obrotu
- ❖ Kąty Eulera
- ❖ Kwaterniony
- ❖ Interpolacja kwaternionów

Wykorzystanie  
Ścieżek

---

# Animacja Orientacji

# Modelowanie orientacji. Macierz obrotu

Zagadnienie  
Interpolacji

Sterowanie Ruchem

Animacja Orientacji

❖ Macierz obrotu

❖ Kąty Eulera

❖ Kwanterniony

❖ Interpolacja  
kwaternionów

Wykorzystanie  
Ścieżek

$$\bullet \quad \frac{1}{2} \left[ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

# Kąty Eulera: odchylenie, pochylenie, przechylenie

Zagadnienie  
Interpolacji

Sterowanie Ruchem

Animacja Orientacji

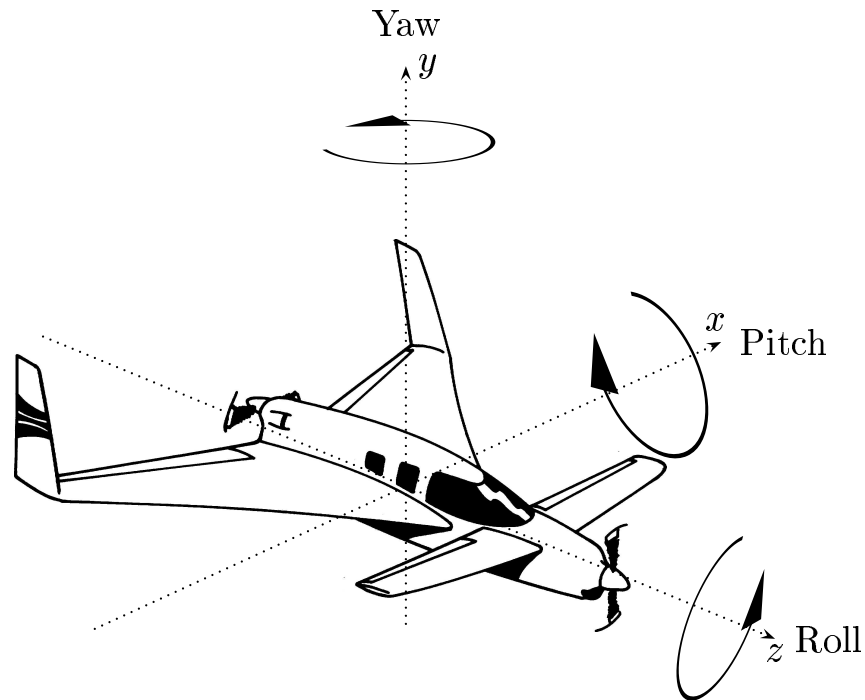
❖ Macierz obrotu

❖ Kąty Eulera

❖ Kwanterniony

❖ Interpolacja  
kwaternionów

Wykorzystanie  
Ścieżek



- $R = R_{\theta_y, j} \circ R_{\theta_p, i} \circ R_{\theta_r, k}$
- $M_R = \begin{pmatrix} s_y s_p s_r + c_y c_r & s_y s_p c_r - c_y c_p & s_y c_p \\ c_p s_r & c_p c_r & -s_p \\ c_y s_p s_r - s_y c_r & c_y s_p c_r + s_y c_r & c_y c_p \end{pmatrix}$
- $c_p = \cos \theta_p$ , etc.

# Ewentualne problemy interpolacji

Zagadnienie  
Interpolacji

Sterowanie Ruchem

Animacja Orientacji

❖ Macierz obrotu

❖ Kąty Eulera

❖ Kwanterniony

❖ Interpolacja  
kwaternionów

Wykorzystanie  
Ścieżek

- Interpolacja kątów, okres  $360^\circ$ .
  - ◆ interpolacja od  $170^\circ$  do  $-170^\circ$  a interpolacja od  $170^\circ$  do  $190^\circ$
- niejednoznaczna reprezentacja obrotu:
  - ◆  $\theta'_y = \theta_y \pm 180^\circ$
  - ◆  $\theta'_p = -\theta_p \pm 180^\circ$
  - ◆  $\theta'_r = \theta_r \pm 180^\circ$
- Blokada przegubu
  - ◆ interpolacja od  $(0^\circ, 0^\circ, 0^\circ)$  do  $(90^\circ, -90^\circ, -90^\circ)$
  - ◆ pozycja pośrednia  $(45^\circ, -45^\circ, -45^\circ)$
  - ◆ [Zobacz](#)

# Ciało kwaternionów $\mathbb{Q}$

Zagadnienie  
Interpolacji

Sterowanie Ruchem

Animacja Orientacji

❖ Macierz obrotu

❖ Kąty Eulera

❖ Kwaterniony

❖ Interpolacja  
kwaternionów

Wykorzystanie  
Ścieżek

- $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$
- $$\begin{cases} i^2 = -1, & ij = k, & ik = -j, \\ ji = -k, & j^2 = -1, & jk = i, \\ ki = j, & kj = -i, & k^2 = -1. \end{cases}$$
- $\|q\| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2},$
- $q^* = q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k,$
- $q^{-1} = \frac{1}{\|q\|^2} q^*,$

# Ciało kwaternionów. Przykłady

Zagadnienie  
Interpolacji

Sterowanie Ruchem

Animacja Orientacji

❖ Macierz obrotu

❖ Kąty Eulera

❖ Kwaterniony

❖ Interpolacja  
kwaternionów

Wykorzystanie  
Ścieżek

$$q_\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}i - \frac{\sqrt{3}}{3}j, \quad q_\beta = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}k, \quad q_\gamma = 2$$

- $q_\alpha \pm q_\beta, q_\alpha \pm q_\gamma,$
- $q_\alpha q_\beta, q_\beta q_\alpha, q_\alpha q_\gamma, q_\gamma q_\alpha,$
- $q_\alpha^*, q_\beta^*, q_\gamma^*,$
- $\|q_\alpha\|, \|q_\beta\|, q_\gamma\|,$
- $q_\alpha^{-1}, q_\beta^{-1}, q_\gamma^{-1}.$

# Włożenie $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}^3$ w $\mathbb{Q}$

Zagadnienie  
Interpolacji

Sterowanie Ruchem

Animacja Orientacji

❖ Macierz obrotu

❖ Kąty Eulera

❖ Kwanterniony

❖ Interpolacja  
kwaternionów

Wykorzystanie  
Ścieżek

- $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ ,
- $\mathbb{R}^3 \hookrightarrow \mathbb{Q} : (v_1, v_2, v_3) \mapsto v_1 i + v_2 j + v_3 k$ .
- $q = s + v_1 i + v_2 j + v_3 k = [s|v]$ .
  - ◆  $[s|v][s'|v'] = [ss' - v \cdot v', sv' + s'v + v \times v']$ .



# Kwaterniony a obroty

Zagadnienie  
Interpolacji

Sterowanie Ruchem

Animacja Orientacji

❖ Macierz obrotu

❖ Kąty Eulera

❖ Kwaterniony

❖ Interpolacja  
kwaternionów

Wykorzystanie  
Ścieżek

**Twierdzenie 1.** Niech  $R_{\theta,u}$  będzie obrotem dookoła osi  $u$  ( $\|u\| = 1$ ),

$q = \cos(\theta/2) + \sin(\theta/2)u_1i + \sin(\theta/2)u_2j + \sin(\theta/2)u_3k$ .

Wtedy  $\forall v \in \mathbb{R}^3$

$$Rv = qvq^{-1}$$

# Animacja Orientacji. Kwaterniony

Zagadnienie  
Interpolacji

Sterowanie Ruchem

Animacja Orientacji

❖ Macierz obrotu

❖ Kąty Eulera

❖ Kwaterniony

❖ Interpolacja  
kwaternionów

Wykorzystanie  
Ścieżek

- Obrót o kąt  $\theta$  dookoła osi  $(u_1, u_2, u_3)$ .
- $q = (\cos(\theta/2), \sin(\theta/2)u_1, \sin(\theta/2)u_2, \sin(\theta/2)u_3)$
- $q = (q_0, q_1, q_2, q_3), \quad \|q\|^2 = \sum q_i^2 = 1:$ 
  - ◆  $\theta = 2 \arccos q_0,$
  - ◆  $u = \frac{1}{\sqrt{1-q_0^2}}(q_1, q_2, q_3) = \frac{1}{\sin \theta/2}(q_1, q_2, q_3),$
  - ◆  $q = (\cos(\theta/2), \sin(\theta/2)u_1, \sin(\theta/2)u_2, \sin(\theta/2)u_3)$
- $R_\theta = R_{\theta+360^\circ} \Rightarrow -q \sim q$

# Kwaternion a macierz obrotu

Zagadnienie  
Interpolacji

Sterowanie Ruchem

Animacja Orientacji

❖ Macierz obrotu

❖ Kąty Eulera

❖ Kwaterniony

❖ Interpolacja  
kwaternionów

Wykorzystanie  
Ścieżek

●  $q \rightarrow M_R$ :

◆  $i \mapsto qi q^{-1}, j \mapsto qj q^{-1}, k \mapsto qk q^{-1},$

◆ 
$$M_R = \begin{pmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2q_1q_2 - 2q_3q_0 & 2q_1q_3 + 2q_2q_0 \\ 2q_1q_2 + 2q_3q_0 & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2q_2q_3 - 2q_1q_0 \\ 2q_1q_3 - 2q_2q_0 & 2q_2q_3 + 2q_1q_0 & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{pmatrix}.$$

●  $M_R \rightarrow q$ :

◆ 
$$\begin{cases} m_{2,1} + m_{1,2} = 4q_1q_2, & m_{1,3} + m_{3,1} = 4q_1q_3, & m_{3,2} + m_{2,3} = 4q_2q_3, \\ m_{2,1} - m_{1,2} = 4q_3q_0, & m_{1,3} - m_{3,1} = 4q_2q_0, & m_{3,2} - m_{2,3} = 4q_1q_0, \end{cases}$$

◆ 
$$\begin{cases} 2m_{0,0} - \text{Tr } M = 4q_0^2 - 1, & 2m_{1,1} - \text{Tr } M = 4q_1^2 - 1, \\ 2m_{2,2} - \text{Tr } M = 4q_2^2 - 1, & 2m_{3,3} - \text{Tr } M = 4q_3^2 - 1. \end{cases}$$

# Interpolacja kwaterionów

Zagadnienie  
Interpolacji

Sterowanie Ruchem

Animacja Orientacji

❖ Macierz obrotu

❖ Kąty Eulera

❖ Kwaterniony

❖ Interpolacja  
kwaternionów

Wykorzystanie  
Ścieżek

- Liniowa:  $q(u) = (1 - u)q_0 + uq_1$
- Łukowa (slerp):  $q(u) = \frac{\sin(1-u)\theta}{\sin \theta} q_1 + \frac{\sin u\theta}{\sin \theta} q_2$
- Interpolacja krzywymi Béziera
  - ✦ w algorytmie de Casteljau użyć slerp

Zagadnienie  
Interpolacji

---

Sterowanie Ruchem

---

Animacja Orientacji

---

Wykorzystanie  
Ścieżek

- ❖ Ruch po ścieżce
- ❖ Zorientowanie  
wzdłuż ścieżki
- ❖ Kamera
- ❖ Wygładzanie
- ❖ Ścieżka na  
powierzchni

# Wykorzystanie Ścieżek

# Ruch po ścieżce

Zagadnienie  
Interpolacji

Sterowanie Ruchem

Animacja Orientacji

Wykorzystanie  
Ścieżek

❖ Ruch po ścieżce

❖ Zorientowanie  
wzdłuż ścieżki

❖ Kamera

❖ Wygładzanie

❖ Ścieżka na  
powierzchni

- Dany jest tor ruchu obiektu (kamery), sparametryzowany długością łuku oraz funkcja przesunięcia
  - ◆ ustalić zmianę położenia oraz zorientowania
  - ◆ jeżeli punkty na torze pochodzą z pomiarów, trzeba tor wygładzić
  - ◆ dodatkowo ścieżka może leżeć na powierzchni innego obiektu
  - ◆ ścieżka bezkolizyjna

# Zorientowanie wzdłuż ścieżki

Zagadnienie  
Interpolacji

Sterowanie Ruchem

Animacja Orientacji

Wykorzystanie  
Ścieżek

❖ Ruch po ścieżce

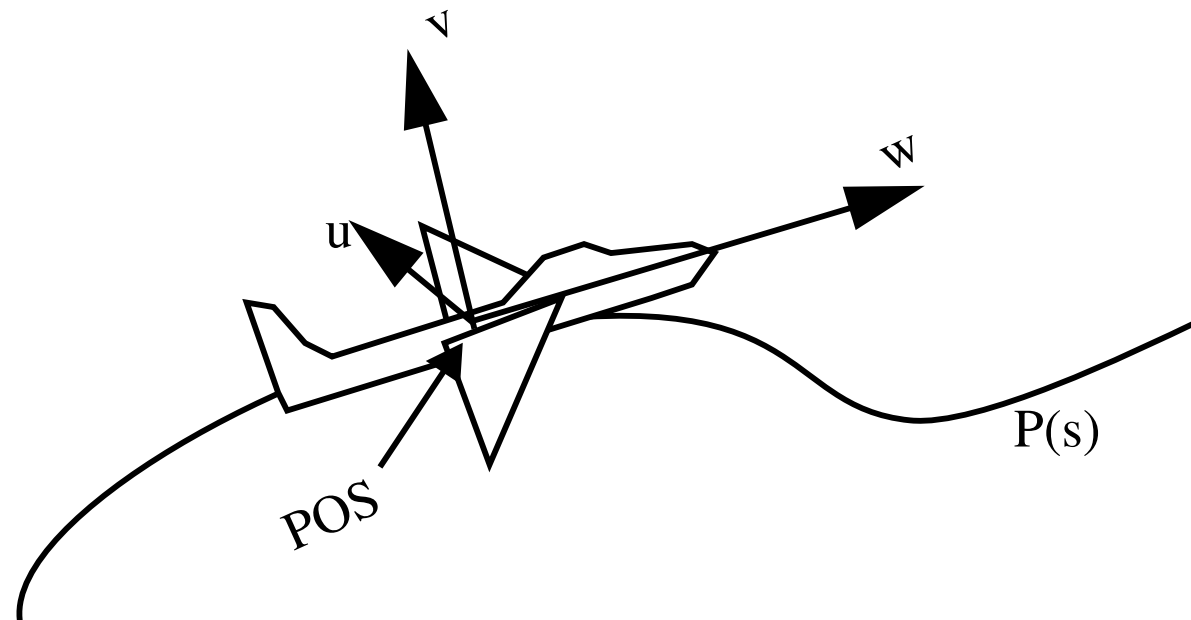
❖ Zorientowanie  
wzdłuż ścieżki

❖ Kamera

❖ Wygładzanie

❖ Ścieżka na  
powierzchni

- Lokalny układ współrzędnych  $(u, v, w)$  (prawoskrętny)
- Początek jest na ścieżce  $P(s)$



# Układ Freneta

Zagadnienie  
Interpolacji

Sterowanie Ruchem

Animacja Orientacji

Wykorzystanie  
Ścieżek

❖ Ruch po ścieżce

❖ Zorientowanie  
wzdłuż ścieżki

❖ Kamera

❖ Wygładzanie

❖ Ścieżka na  
powierzchni

- Jean Frédéric Frenet, 1847

$$w = \frac{P'(s)}{|P'(s)|}$$

$$u = \frac{P''(s) \times P'(s)}{|P''(s) \times P'(s)|}$$

$$v = u \times w$$



# Układ Freneta, problemy

Zagadnienie  
Interpolacji

Sterowanie Ruchem

Animacja Orientacji

Wykorzystanie  
Ścieżek

❖ Ruch po ścieżce

❖ Zorientowanie  
wzdłuż ścieżki

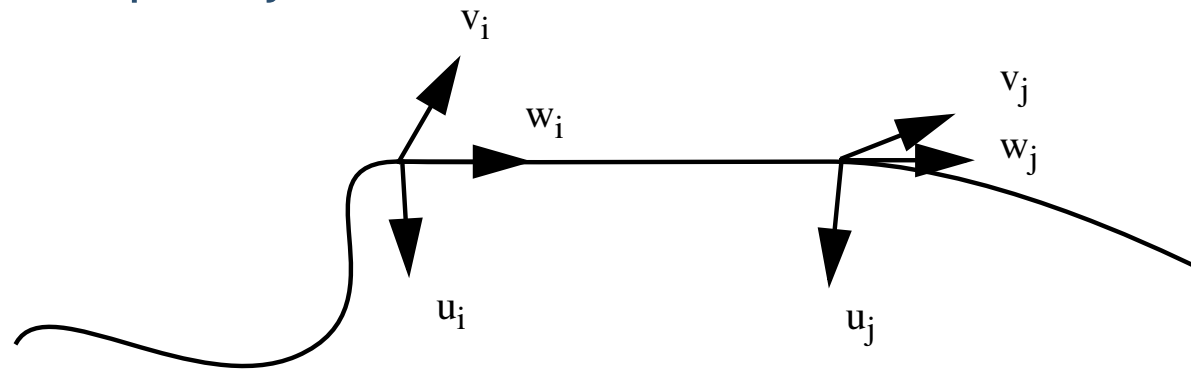
❖ Kamera

❖ Wygładzanie

❖ Ścieżka na  
powierzchni

- Brak naturalnego kierunku „do góry”
- Punkty spłaszczenia ( $P''(s) = 0$ )

♦ interpolacja na odcinku



- Nieciągłość wektora normalnego (dwa półokręgi)
- Wektor styczny nie określa kierunku, do którego podąża obiekt
- Wektor  $v$  (kierunek „do góry”) może gwałtownie się obracać

# ***Układ Freneta, ważna informacja***

Zagadnienie  
Interpolacji

Sterowanie Ruchem

Animacja Orientacji

Wykorzystanie  
Ścieżek

❖ Ruch po ścieżce

❖ Zorientowanie  
wzdłuż ścieżki

❖ Kamera

❖ Wygładzanie

❖ Ścieżka na  
powierzchni

- Wektor normalny wskazuje kierunek skrętu
  - ◆ można pochylić obiekt w tę stronę
  - ◆ bądź w przeciwnym kierunku (siła odśrodkowa)

# Ruch kamery po ścieżce

Zagadnienie  
Interpolacji

Sterowanie Ruchem

Animacja Orientacji

Wykorzystanie  
Ścieżek

❖ Ruch po ścieżce

❖ Zorientowanie  
wzdłuż ścieżki

❖ Kamera

❖ Wygładzanie

❖ Ścieżka na  
powierzchni

- Wybrać środek zainteresowania (COI) w ustalonym punkcie sceny (w środku jednego z obiektów)
  - ◆  $w = \text{COI} - \text{POS}$
- Niech oś  $Oy$  określa kierunek „do góry”
  - ◆  $u = w \times y$
  - ◆  $v = u \times w$

# Kierunek patrzenia

Zagadnienie  
Interpolacji

Sterowanie Ruchem

Animacja Orientacji

Wykorzystanie  
Ścieżek

❖ Ruch po ścieżce  
❖ Zorientowanie  
wzdłuż ścieżki

❖ Kamera

❖ Wygładzanie  
❖ Ścieżka na  
powierzchni

- Kierunek do COI
  - ✦ przechodzenie blisko COI może spowodować gwałtowne zmiany kierunku
- Punkty na krzywej
- Punkty na innej krzywej
- Interpolowane punkty na scenie
- Kierunek „do góry”:
  - ✦ w płaszczyźnie  $w$  i  $y$
  - ✦ odchylony od tego kierunku

# Wybór środka zainteresowania

Zagadnienie  
Interpolacji

Sterowanie Ruchem

Animacja Orientacji

Wykorzystanie  
Ścieżek

❖ Ruch po ścieżce  
❖ Zorientowanie  
wzdłuż ścieżki

❖ Kamera

❖ Wygładzanie  
❖ Ścieżka na  
powierzchni

- Punkt na krzywej z wyprzedzeniem  $P(s + \Delta s)$ 
  - ◆ wykorzystać parametryzację łukową
  - ◆ na końcu ścieżki można użyć interpolacji z wektorem stycznym w końcowym punkcie
  - ◆ chwiejąca się kamera
    - uśrednienie kilka punktów krzywej
      - ◆ za mało punktów (albo blisko siebie) — efekt pozostaje
      - ◆ za dużo punktów — kamera będzie zbyt statyczna
- Wprowadzenie dla COI funkcji  $C(s)$
- Można wprowadzić dla kierunku „do góry” funkcję  $U(s)$   
 $w = C(s) - P(s)$ ,  $u = w \times (U(s) - P(s))$ ,  $v = u \times w$ .

# Wyglądanie ścieżki

Zagadnienie  
Interpolacji

Sterowanie Ruchem

Animacja Orientacji

Wykorzystanie  
Ścieżek

❖ Ruch po ścieżce

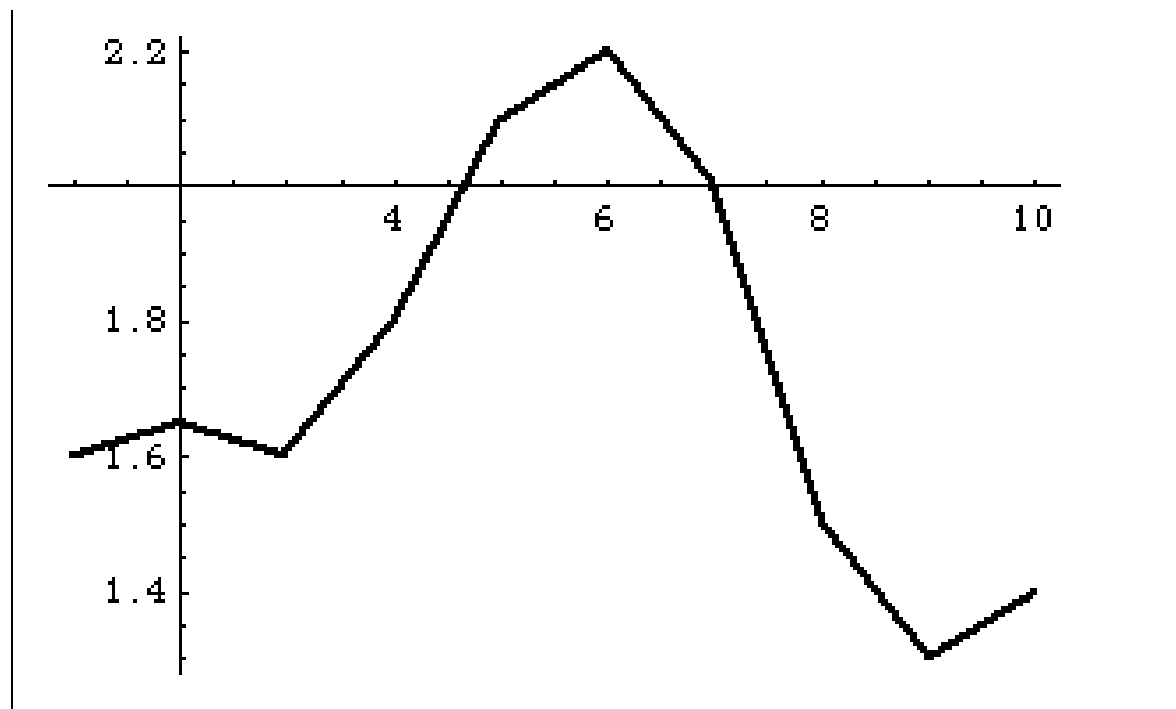
❖ Zorientowanie  
wzdłuż ścieżki

❖ Kamera

❖ Wyglądanie

❖ Ścieżka na  
powierzchni

- Jeżeli kolejne punkty pochodzą z pomiarów, to może być potrzebne wyglądanie



# Interpolacja liniowa

Zagadnienie  
Interpolacji

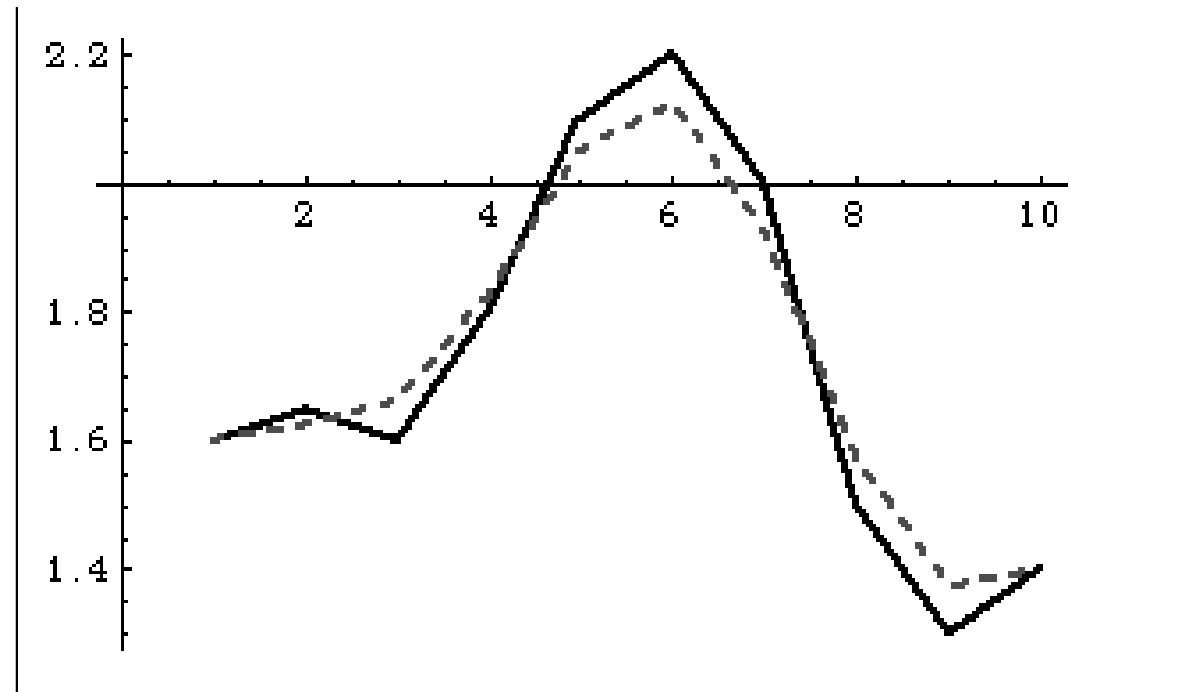
Sterowanie Ruchem

Animacja Orientacji

Wykorzystanie  
Ścieżek

- ❖ Ruch po ścieżce
- ❖ Zorientowanie  
wzdłuż ścieżki
- ❖ Kamera
- ❖ Wygładzanie
- ❖ Ścieżka na  
powierzchni

$$p'_i = \frac{1}{2} \left( p_i + \frac{p_{i-1} + p_{i+1}}{2} \right) = \frac{1}{4}p_{i-1} + \frac{1}{2}p_i + \frac{1}{4}p_{i+1}$$



# Interpolacja sześcienna

Zagadnienie  
Interpolacji

Sterowanie Ruchem

Animacja Orientacji

Wykorzystanie  
Ścieżek

❖ Ruch po ścieżce

❖ Zorientowanie  
wzdłuż ścieżki

❖ Kamera

❖ Wygładzanie

❖ Ścieżka na  
powierzchni

- $P(u)$  — wielomian stopnia 3, przechodący przez sąsiadujące punkty  $P(0) = p_{i-1}$ ,  $P(\frac{1}{4}) = p_i$ ,  $P(\frac{3}{4}) = p_{i+1}$ ,  $P(1) = p_{i+2}$
- $p'_i = \frac{1}{2} (P(\frac{1}{2}) + p_1)$ 
  - ◆ układ równań
  - ◆ wzór Lanrange'a
  - ◆ wzór Newtona
- Na końcach przedziału można użyć paraboli  $P(0) = p_0$ ,  $P(\frac{2}{3}) = p_2$ ,  $P(1) = p_3$ ,  $p'_1 = \frac{1}{2} (P(\frac{1}{3}) + p_1)$
- Pierwszy punkt bez zmian
  - ◆ można użyć krzywej drugiego stopnia:  
 $p'_0 = p_3 + 3(p_1 - p_2)$



# Interpolacja sześcienna, przykład

Zagadnienie  
Interpolacji

Sterowanie Ruchem

Animacja Orientacji

Wykorzystanie  
Ścieżek

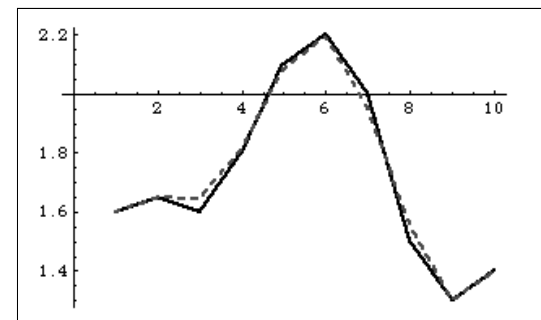
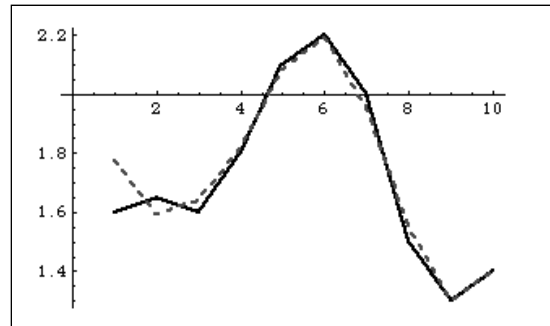
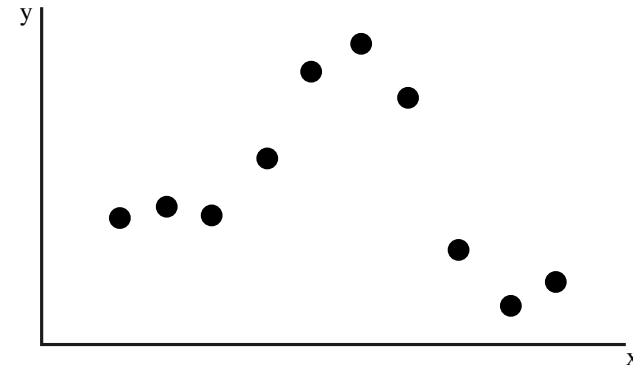
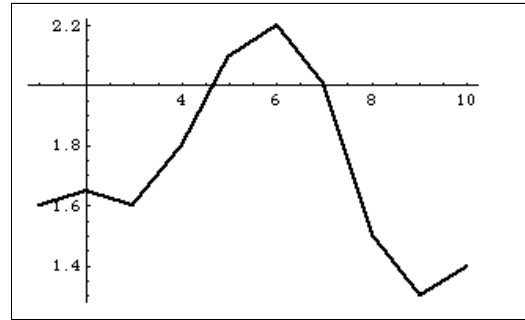
❖ Ruch po ścieżce

❖ Zorientowanie  
wzdłuż ścieżki

❖ Kamera

❖ Wygładzanie

❖ Ścieżka na  
powierzchni



# Użycie splotu

Zagadnienie  
Interpolacji

Sterowanie Ruchem

Animacja Orientacji

Wykorzystanie  
Ścieżek

❖ Ruch po ścieżce

❖ Zorientowanie  
wzdłuż ścieżki

❖ Kamera

❖ Wygładzanie

❖ Ścieżka na  
powierzchni

- $p_i = f(x_i)$
- Splot:  $f \star g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x + u)g(u) du$
- $g(u)$  — filtr,  $\int_{-\infty}^{\infty} g(u) du = 1$
- Całkę można obliczyć numerycznie
- W punktach końcowych funkcję można dowolnie rozszerzyć

# Przykłady filtrów

Zagadnienie  
Interpolacji

Sterowanie Ruchem

Animacja Orientacji

Wykorzystanie  
Ścieżek

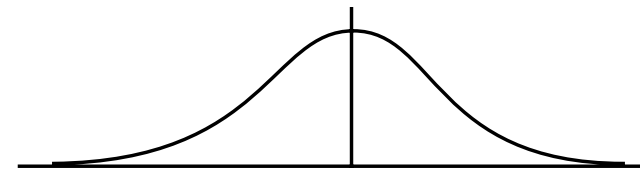
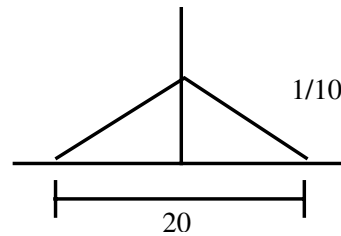
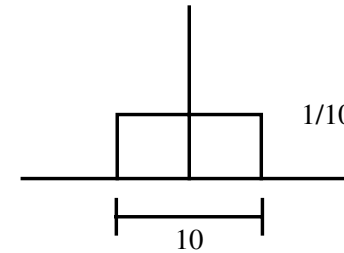
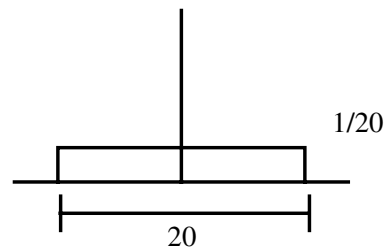
❖ Ruch po ścieżce

❖ Zorientowanie  
wzdłuż ścieżki

❖ Kamera

❖ Wygładzanie

❖ Ścieżka na  
powierzchni



- prostokątny, dachowy, gaussowski

# Splot z filtrem dachowym

Zagadnienie  
Interpolacji

Sterowanie Ruchem

Animacja Orientacji

Wykorzystanie  
Ścieżek

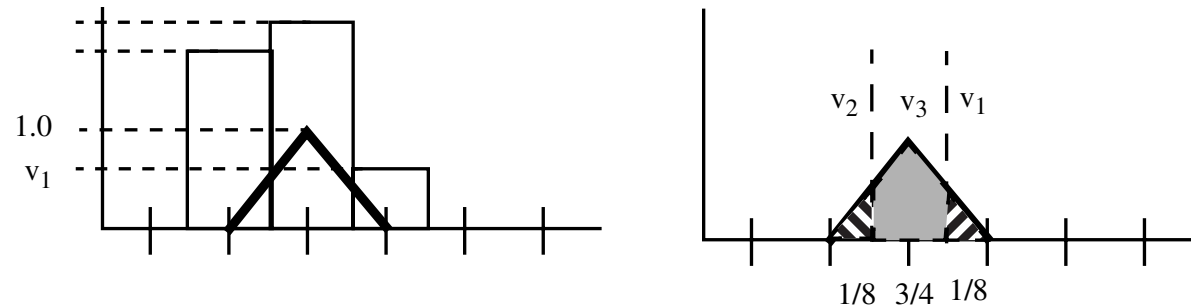
❖ Ruch po ścieżce

❖ Zorientowanie  
wzdłuż ścieżki

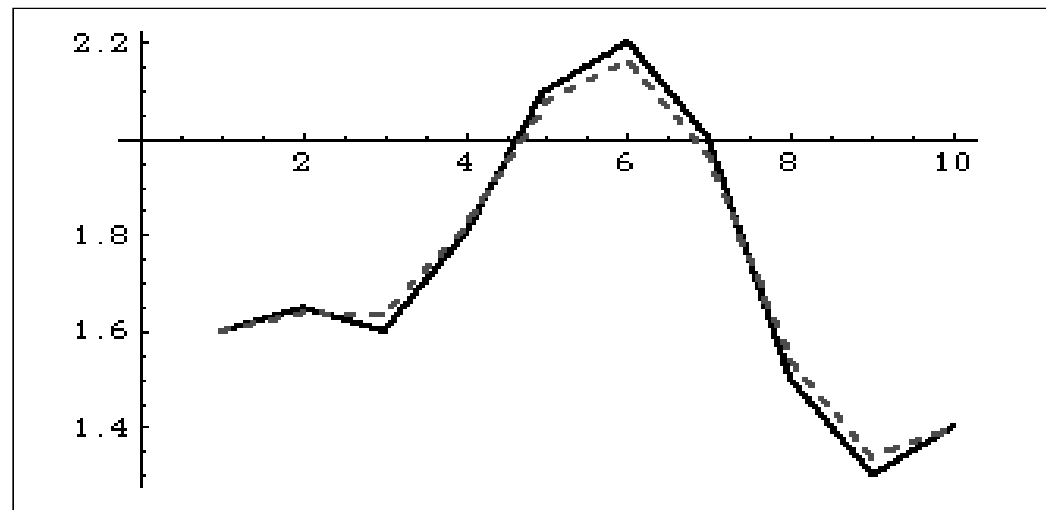
❖ Kamera

❖ Wygładzanie

❖ Ścieżka na  
powierzchni



$$\bullet \quad v = \frac{1}{8}v_1 + \frac{3}{4}v_2 + \frac{1}{8}v_3$$



# Aproksymacja krzywymi B-sklejanyymi

Zagadnienie  
Interpolacji

Sterowanie Ruchem

Animacja Orientacji

Wykorzystanie  
Ścieżek

❖ Ruch po ścieżce

❖ Zorientowanie  
wzdłuż ścieżki

❖ Kamera

❖ Wygładzanie

❖ Ścieżka na  
powierzchni

- Można użyć krzywych B-sklejanych
  - ◆ wynik – gładka krzywa
  - ◆ nie przechodzi przez dane węzły

# Wyznaczenie ścieżki na powierzchni

Zagadnienie  
Interpolacji

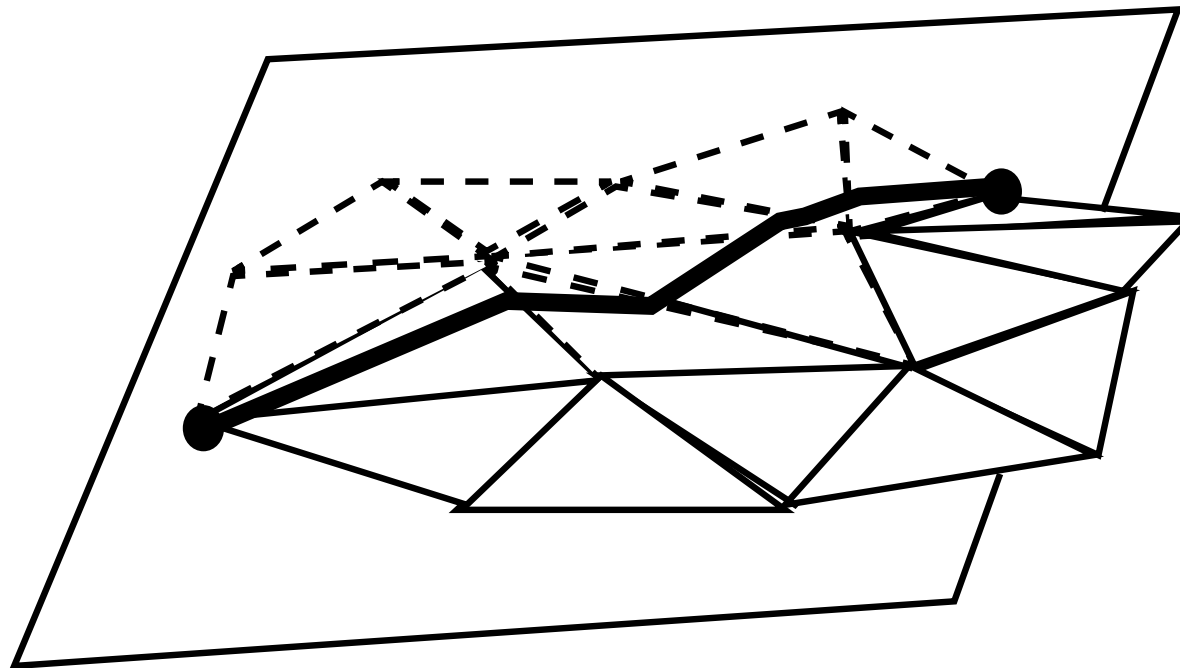
Sterowanie Ruchem

Animacja Orientacji

Wykorzystanie  
Ścieżek

- ❖ Ruch po ścieżce
- ❖ Zorientowanie  
wzdłuż ścieżki
- ❖ Kamera
- ❖ Wygładzanie
- ❖ Ścieżka na  
powierzchni

- Dane są dwa punkty na powierzchni
- Ścieżka najkrótsza — kosztowne obliczeniowo
- Ścieżka prawie najkrótsza:
  - ◆ płaszczyzna łącząca końce ścieżki i możliwie prostopadła do powierzchni



# Wyznaczenie ścieżki na powierzchni

Zagadnienie  
Interpolacji

Sterowanie Ruchem

Animacja Orientacji

Wykorzystanie  
Ścieżek

❖ Ruch po ścieżce

❖ Zorientowanie  
wzdłuż ścieżki

❖ Kamera

❖ Wygładzanie

❖ Ścieżka na  
powierzchni

- Powierzchnia parametryzowana  $P = P(u, v)$ 
  - ◆ połączyć w dziedzinie  $(u, v)$  końce ścieżki odcinkiem (łukiem)
- Skomplikowany mash z trójkątów
  - ◆ algorytm zachłanny wyznaczenia ścieżki z krawędzi masha
    - łączymy bieżący punkt z końcem odcinkiem
    - wybieramy krawędź, która ma najmniejszy kąt z odcinkiem
      - ◆ obliczamy kosinusy

# Ścieżka najszybszego spadku

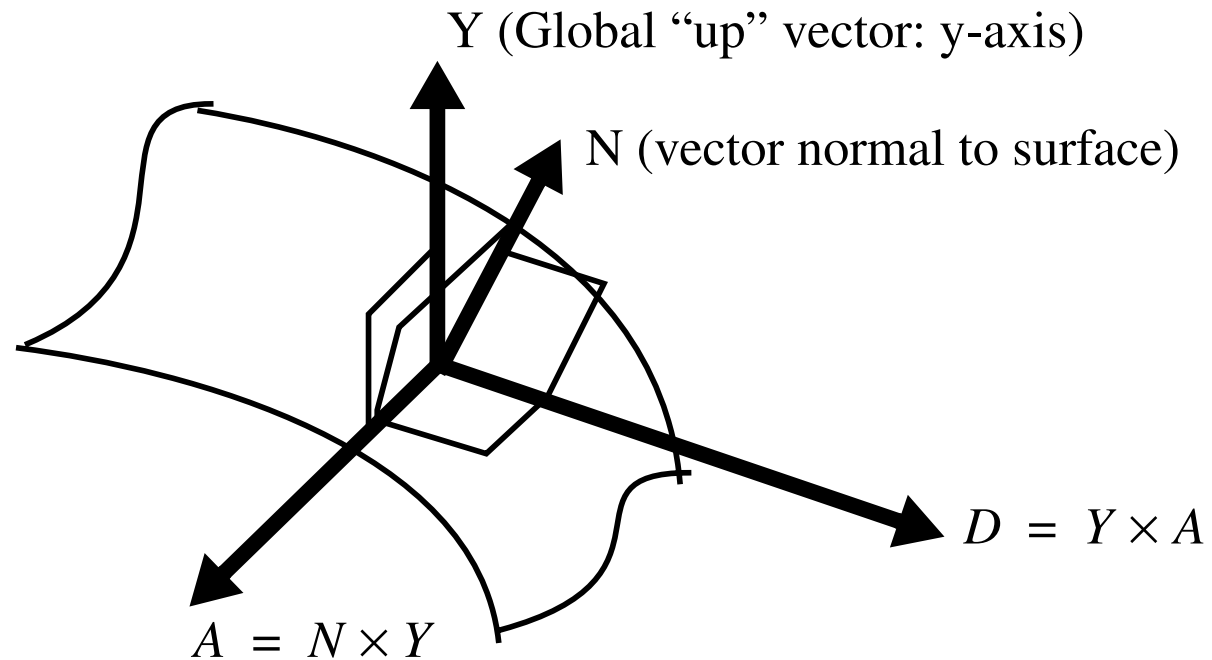
Zagadnienie  
Interpolacji

Sterowanie Ruchem

Animacja Orientacji

Wykorzystanie  
Ścieżek

- ❖ Ruch po ścieżce
- ❖ Zorientowanie  
wzdłuż ścieżki
- ❖ Kamera
- ❖ Wygładzanie
- ❖ Ścieżka na  
powierzchni





# Ścieżki bezkolizyjne

Zagadnienie  
Interpolacji

Sterowanie Ruchem

Animacja Orientacji

Wykorzystanie  
Ścieżek

❖ Ruch po ścieżce

❖ Zorientowanie  
wzdłuż ścieżki

❖ Kamera

❖ Wygładzanie

❖ Ścieżka na  
powierzchni

- Nieruchome przeszkody (albo rozhome o wiadomych torach)
  - ✦ wyznaczenie punktów pośrednich
  - ✦ przybliżenie przeszkód prostymi obiektami (sfera, prostopadłościan)
- Ruchome przeszkody
  - ✦ poszukiwanie możliwego przedłużenia ścieżki przed przeszkodą (algorytm zachłanny)
  - ✦ ruch przeszkod jest przewidywalny