

Elementy grafiki komputerowej. Elementy krzywych Béziera

Aleksander Denisiuk
Uniwersytet Warmińsko-Mazurski
Olsztyn, ul. Słoneczna 54
denisjuk@matman.uwm.edu.pl

Elementy krzywych Béziera

- ❖ Splajny
- ❖ Krzywe Béziera
- ❖ Algorytm de Casteljau
- ❖ Krzywe Béziera sklejane
- ❖ Krzywe Béziera dowolnego stopnia
- ❖ Powierzchnie Béziera
- ❖ Wymierne krzywe Béziera
- ❖ Bryła obrotowa

Najnowsza wersja tego dokumentu dostępna jest pod adresem

<http://wmii.uwm.edu.pl/~denisjuk/uwm>

Splajny

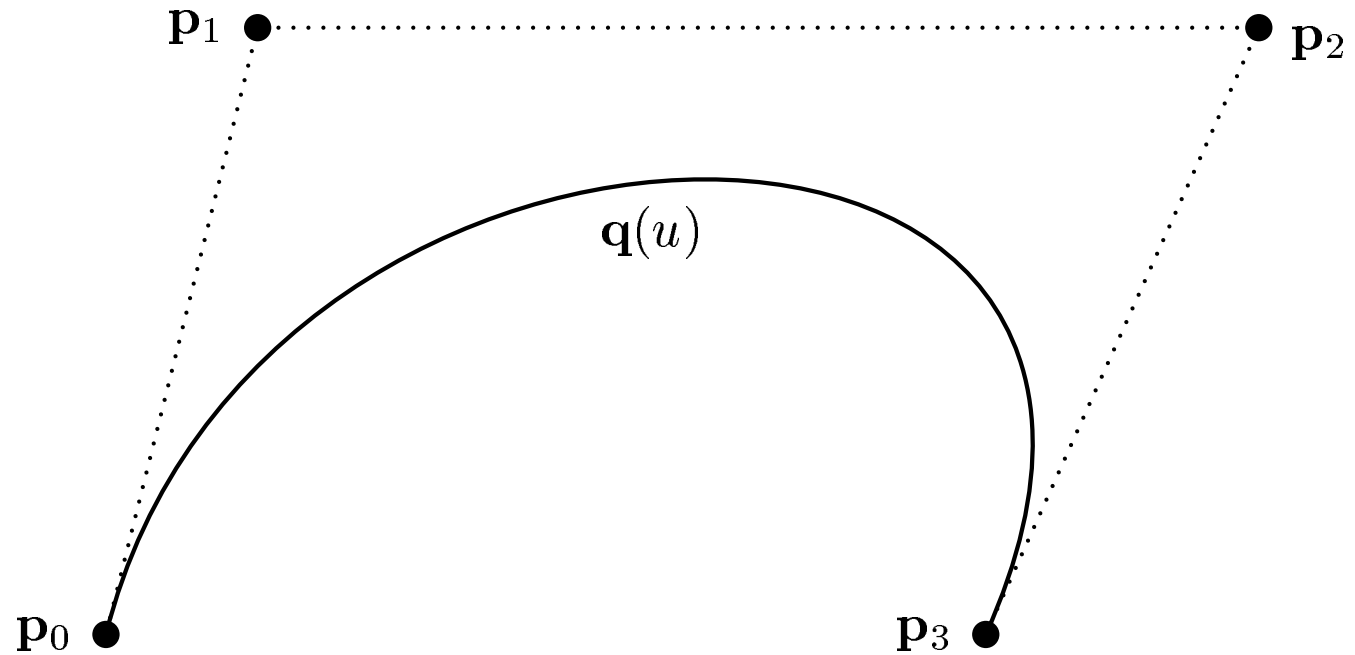
❖ Splajny

- ❖ Krzywe Béziera
- ❖ Algorytm de Casteljau
- ❖ Krzywe Béziera sklejane
- ❖ Krzywe Béziera dowolnego stopnia
- ❖ Powierzchnie Béziera
- ❖ Wymierne krzywe Béziera
- ❖ Bryła obrotowa

- Krzywe Béziera
 - ◆ Bézier — Renault, 1968, 1974;
 - ◆ de Casteljau — Citroën 1959, 1963
- B-splajny (Shoenberg 1946)

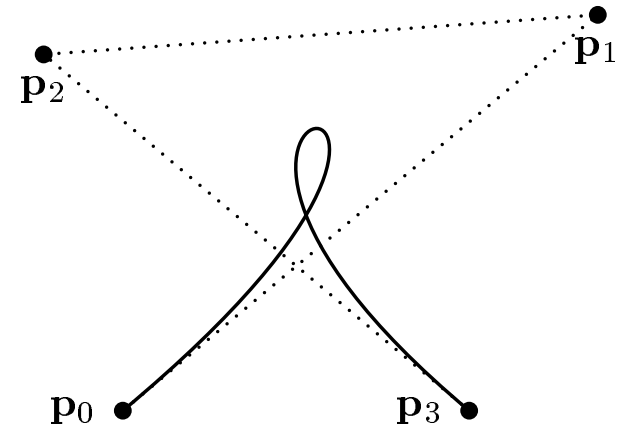
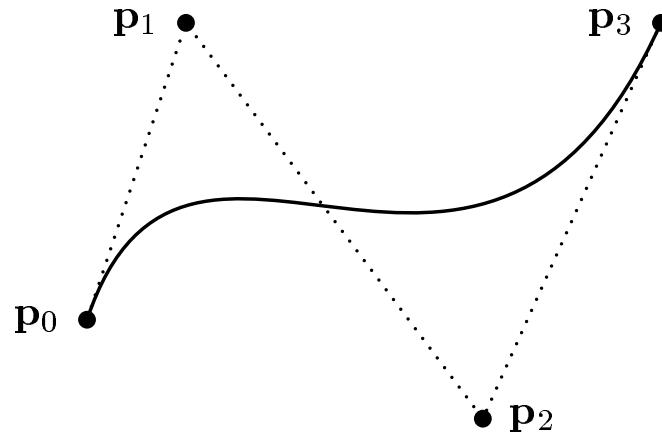
Krzywe Béziera trzeciego stopnia

- ❖ Splajny
- ❖ Krzywe Béziera
- ❖ Algorytm de Casteljau
- ❖ Krzywe Béziera sklejane
- ❖ Krzywe Béziera dowolnego stopnia
- ❖ Powierzchnie Béziera
- ❖ Wymierne krzywe Béziera
- ❖ Bryła obrotowa



Krzywe Béziera trzeciego stopnia

- ❖ Splajny
- ❖ Krzywe Béziera
- ❖ Algorytm de Casteljau
- ❖ Krzywe Béziera sklejane
- ❖ Krzywe Béziera dowolnego stopnia
- ❖ Powierzchnie Béziera
- ❖ Wymierne krzywe Béziera
- ❖ Bryła obrotowa



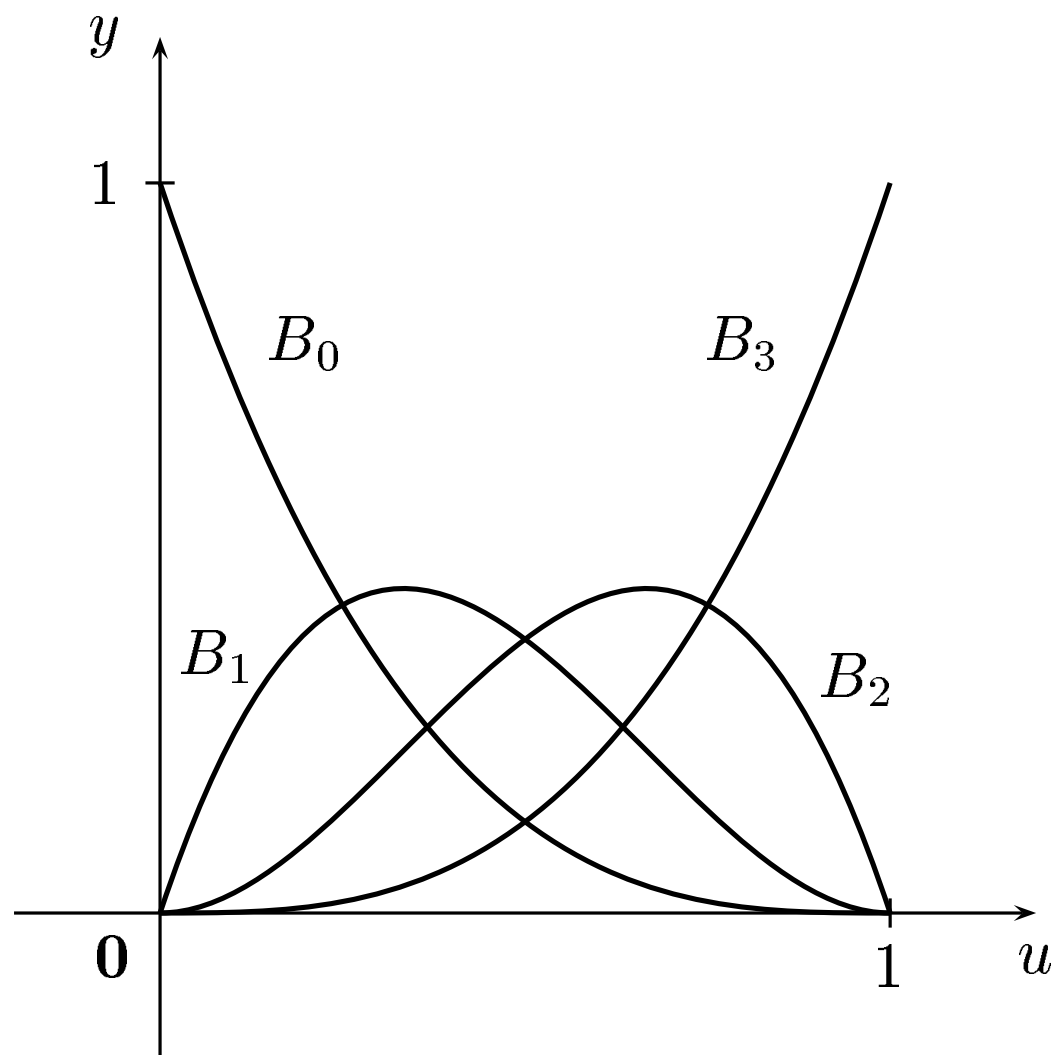
Krzywe Béziera trzeciego stopnia

- ❖ Splajny
- ❖ Krzywe Béziera
- ❖ Algorytm de Casteljau
- ❖ Krzywe Béziera sklejane
- ❖ Krzywe Béziera dowolnego stopnia
- ❖ Powierzchnie Béziera
- ❖ Wymierne krzywe Béziera
- ❖ Bryła obrotowa

- $q(u) = B_0(u)p_0 + B_1(u)p_1 + B_2(u)p_2 + B_3(u)p_3$, gdzie
 - ◆ $B_i(u) = \binom{3}{i}u^i(1-u)^{3-i}$ — wielomiany Bernsteina,
 - ◆ $\binom{n}{m} = C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ — symbol Newtona
 - ◆ $B_0(u) = (1-u)^3, \quad B_1(u) = 3u(1-u)^2$
 - ◆ $B_2(u) = 3u^2(1-u), \quad B_3(u) = u^3$
 - ◆ $\sum_{i=0}^3 B_i(u) = \sum_{i=0}^3 \binom{3}{i}u^i(1-u)^{3-i} = (u + (1-u))^3 = 1$

Wielomiany Bernsteina (stopnia 3)

- ❖ Splajny
- ❖ Krzywe Béziera
- ❖ Algorytm de Casteljau
- ❖ Krzywe Béziera sklejane
- ❖ Krzywe Béziera dowolnego stopnia
- ❖ Powierzchnie Béziera
- ❖ Wymierne krzywe Béziera
- ❖ Bryła obrotowa



Wielomiany Bernsteina (stopnia 3)

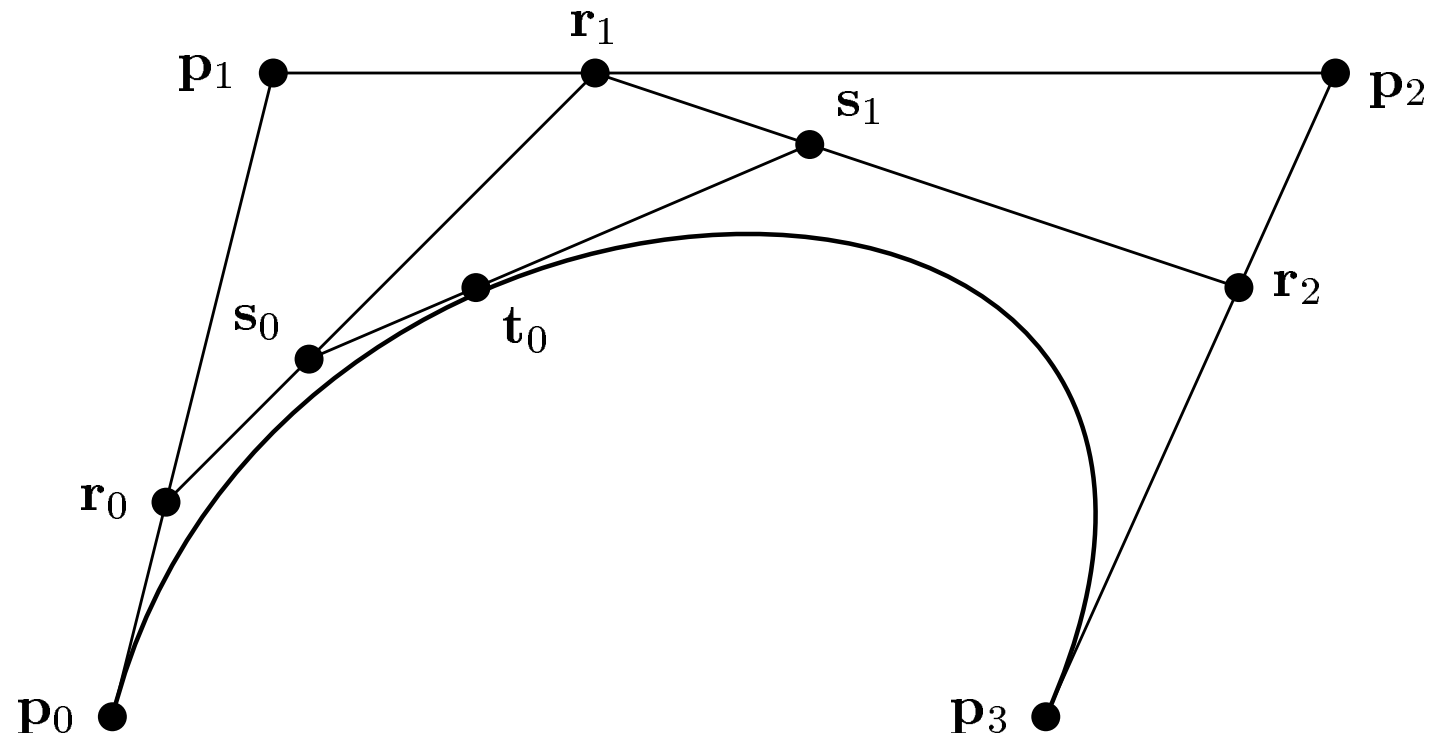
- ❖ Splajny
- ❖ Krzywe Béziera
- ❖ Algorytm de Casteljau
- ❖ Krzywe Béziera sklejane
- ❖ Krzywe Béziera dowolnego stopnia
- ❖ Powierzchnie Béziera
- ❖ Wymierne krzywe Béziera
- ❖ Bryła obrotowa

$$\begin{aligned} B'_0(0) &= -3, & B'_1(0) &= 3, & B'_2(0) &= 0, & B'_3(0) &= 0 \\ B'_0(1) &= 0, & B'_1(1) &= 0, & B'_2(1) &= -3, & B'_3(1) &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q'(0) &= 3(p_1 - p_0), \\ q'(1) &= 3(p_3 - p_2) \end{aligned}$$

Algorytm de Casteljau

- ❖ Splajny
- ❖ Krzywe Béziera
- ❖ Algorytm de Casteljau
- ❖ Krzywe Béziera sklejane
- ❖ Krzywe Béziera dowolnego stopnia
- ❖ Powierzchnie Béziera
- ❖ Wymierne krzywe Béziera
- ❖ Bryła obrotowa



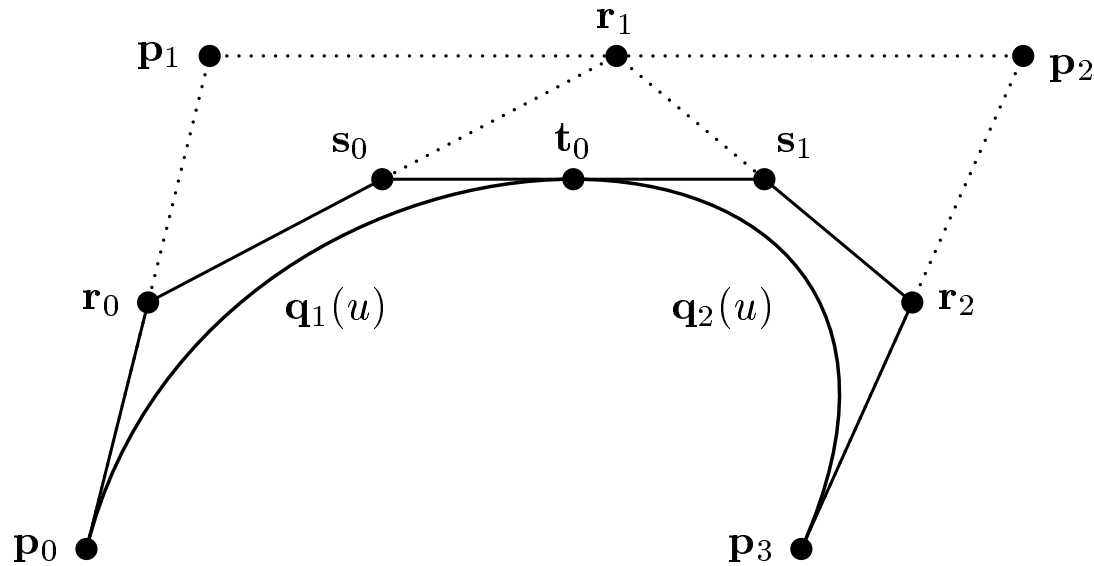
$$r_i = (1 - u) \cdot p_i + u \cdot p_{i+1},$$

$$s_i = (1 - u) \cdot r_i + u \cdot p_{i+1},$$

$$t_0 = (1 - u) \cdot s_0 + u s_1$$

Algorytm de Casteljau ($u = \frac{1}{2}$)

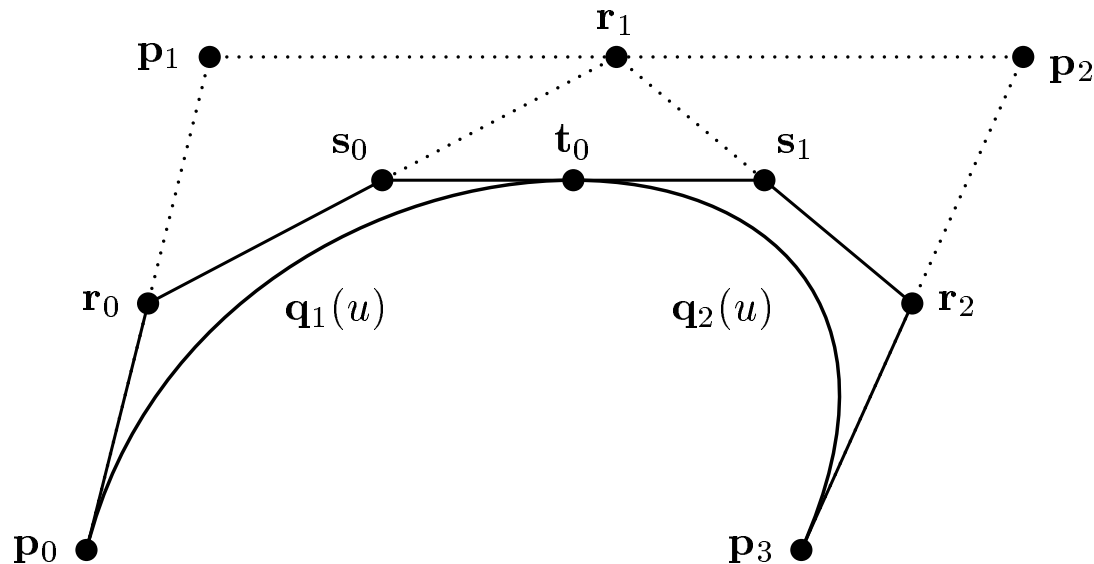
- ❖ Splajny
- ❖ Krzywe Béziera
- ❖ Algorytm de Casteljau
- ❖ Krzywe Béziera sklejane
- ❖ Krzywe Béziera dowolnego stopnia
- ❖ Powierzchnie Béziera
- ❖ Wymierne krzywe Béziera
- ❖ Bryła obrotowa



$$r_i = \frac{p_i + p_{i+1}}{2}, \quad s_i = \frac{r_i + r_{i+1}}{2}, \quad t_0 = \frac{s_0 + s_1}{2},$$
$$q(1/2) = t_0 = \frac{1}{8}p_0 + \frac{3}{8}p_1 + \frac{3}{8}p_2 + \frac{1}{8}p_3$$

Podział krzywej

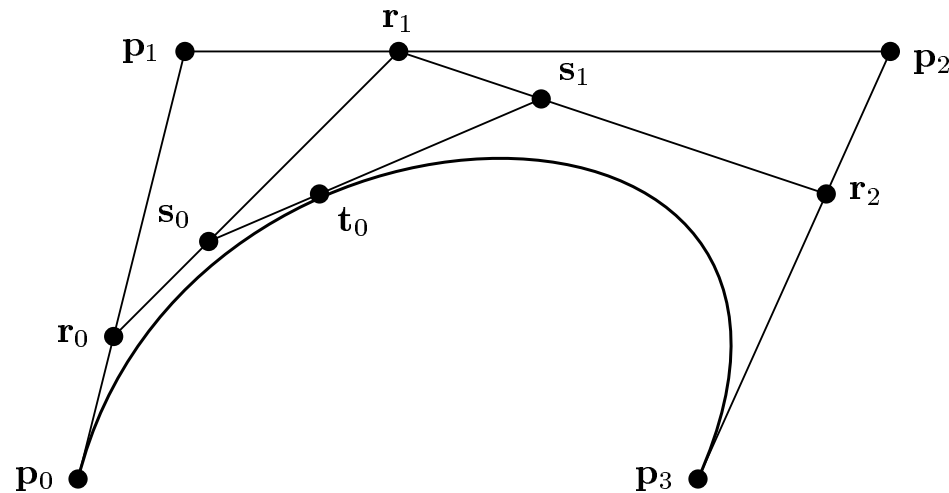
- ❖ Splajny
- ❖ Krzywe Béziera
- ❖ Algorytm de Casteljau
- ❖ Krzywe Béziera sklejane
- ❖ Krzywe Béziera dowolnego stopnia
- ❖ Powierzchnie Béziera
- ❖ Wymierne krzywe Béziera
- ❖ Bryła obrotowa



Twierdzenie 1. Niech $q(u)$ będzie krzywą Béziera o punktach kontrolnych p_0, p_1, p_2, p_3 . Wtedy $q_1(u) = q(u/2)$ będzie Krzywą Béziera o punktach kontrolnych p_0, r_0, s_0, t_0 , $q_2(u) = q((u + 1)/2)$ będzie krzywą Béziera o punktach t_0, s_1, r_2, p_3 .

Zagęszczanie (recursive subdivision)

- ❖ Splajny
- ❖ Krzywe Béziera
- ❖ Algorytm de Casteljau
- ❖ Krzywe Béziera sklejane
- ❖ Krzywe Béziera dowolnego stopnia
- ❖ Powierzchnie Béziera
- ❖ Wymierne krzywe Béziera
- ❖ Bryła obrotowa



Twierdzenie 2. Niech $q(u)$ będzie krzywą Béziera o punktach kontrolnych p_0, p_1, p_2, p_3 . Wtedy $q_1(u) = q(u_0u)$ będzie Krzywą Béziera o punktach kontrolnych p_0, r_0, s_0, t_0 , $q_2(u) = q(u_0 + (1 - u_0)u)$ będzie krzywą Béziera o punktach t_0, s_1, r_2, p_3 .

Renderowanie krzywych Béziera w postaci ciągu odcinków prostych

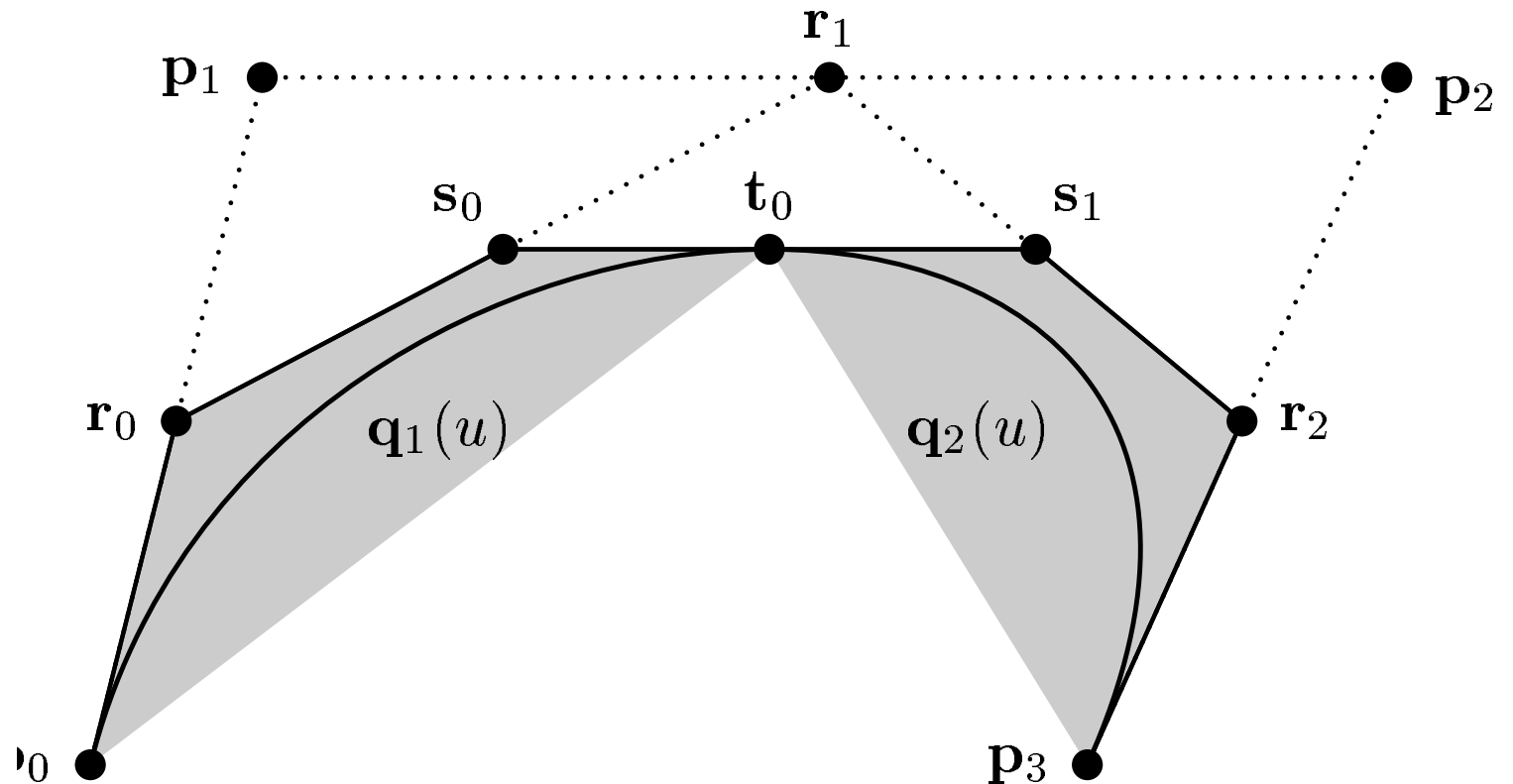
- ❖ Splajny
- ❖ Krzywe Béziera
- ❖ Algorytm de Casteljau
- ❖ Krzywe Béziera sklejane
- ❖ Krzywe Béziera dowolnego stopnia
- ❖ Powierzchnie Béziera
- ❖ Wymierne krzywe Béziera
- ❖ Bryła obrotowa

- $\|q(\frac{1}{2}) - \frac{1}{2}(p_0 + p_3)\| < \varepsilon,$
- $\|p_0 - p_1 - p_2 + p_3\|^2 < (8\varepsilon/3)^2,$
- $p_1, p_2 \approx \in \overline{p_0 p_3}$

Właściwość otoczki wypukłej

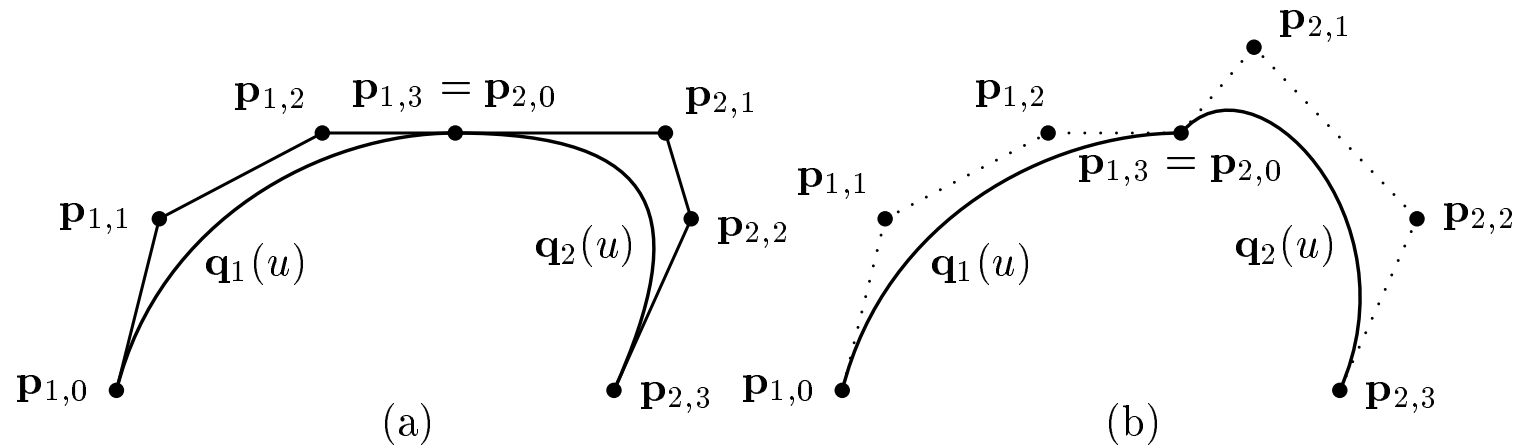
- ❖ Splajny
- ❖ Krzywe Béziera
- ❖ Algorytm de Casteljau
- ❖ Krzywe Béziera sklejane
- ❖ Krzywe Béziera dowolnego stopnia
- ❖ Powierzchnie Béziera
- ❖ Wymierne krzywe Béziera
- ❖ Bryła obrotowa

- Krzywa Béziera zawiera się w otoczce wypukłej swoich punktów kontrolnych



Krzywe Béziera sklejane

- ❖ Splajny
- ❖ Krzywe Béziera
- ❖ Algorytm de Casteljau
- ❖ **Krzywe Béziera sklejane**
- ❖ Krzywe Béziera dowolnego stopnia
- ❖ Powierzchnie Béziera
- ❖ Wymierne krzywe Béziera
- ❖ Bryła obrotowa



$$q'_1(1) = q'_2(0) \Rightarrow p_{1,3} - p_{1,2} = p_{2,1} - p_{2,0}$$

Zagadnienie interpolacji

- ❖ Splajny
- ❖ Krzywe Béziera
- ❖ Algorytm de Casteljau
- ❖ Krzywe Béziera sklejane
- ❖ Krzywe Béziera dowolnego stopnia
- ❖ Powierzchnie Béziera
- ❖ Wymierne krzywe Béziera
- ❖ Bryła obrotowa

- Dane są punkty $p_0, \dots, p_m$ i węzły $u_0, \dots, u_m$.
- Określić parametryzowaną krzywą $q(u)$ tak, żeby $q(u_i) = p_i$ dla $i = 0, \dots, m$.
- Krzywa odcinkowo-wielomianowa (trzeciego stopnia).
- Sklejanie krzywych Béziera.

Splajny Catmulla-Roma

- ❖ Splajny
- ❖ Krzywe Béziera
- ❖ Algorytm de Casteljau
- ❖ Krzywe Béziera sklejane
- ❖ Krzywe Béziera dowolnego stopnia
- ❖ Powierzchnie Béziera
- ❖ Wymierne krzywe Béziera
- ❖ Bryła obrotowa

- Dane są punkty $P_0, \dots, P_m$ i węzły $u_i = i$ dla $i = 0, \dots, m$.
- Określić parametryzowaną krzywą $q(u)$ tak, żeby $q(i) = P_i$ dla $i = 1, \dots, m - 1$.
- Krzywa Catmull-Rom składa się z $m - 2$ krzywych Béziera.
- Punkty kontrolne wybiera się tak, żeby krzywa była klasy C^1 .

Splajny Catmulla-Roma

- ❖ Splajny
- ❖ Krzywe Béziera
- ❖ Algorytm de Casteljau
- ❖ Krzywe Béziera sklejane
- ❖ Krzywe Béziera dowolnego stopnia
- ❖ Powierzchnie Béziera
- ❖ Wymierne krzywe Béziera
- ❖ Bryła obrotowa

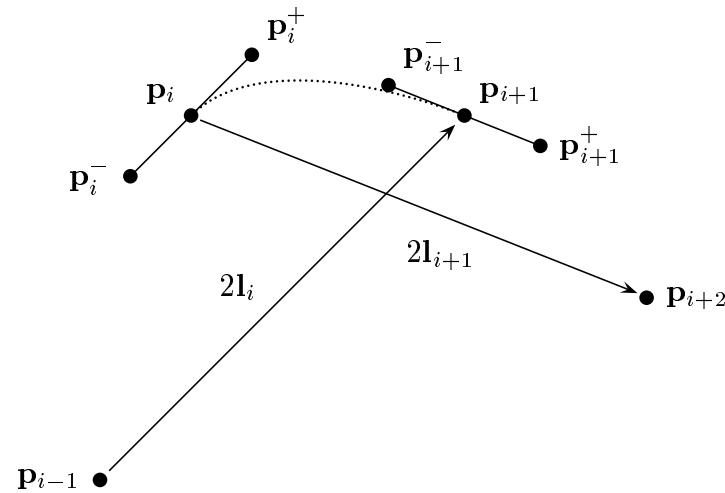


Figure VII.22: Defining the Catmull-Rom spline segment from the point $\mathbf{p}_i$ to the point $\mathbf{p}_{i+1}$. The points $\mathbf{p}_i^-$, $\mathbf{p}_i$, and $\mathbf{p}_i^+$ are collinear and parallel to $\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_{i-1}$. The points $\mathbf{p}_i$, $\mathbf{p}_i^+$, $\mathbf{p}_{i+1}^-$, and $\mathbf{p}_{i+1}$ form the control points of a degree three Bézier curve, which is shown as a dotted curve.

$$l_i = \frac{1}{2}(p_{i+1} - p_{i-1}), \quad p_i^\pm = p_i \pm \frac{1}{3}l_i$$

Syngularność splajnu Catmulla-Roma

- ❖ Splajny
- ❖ Krzywe Béziera
- ❖ Algorytm de Casteljau
- ❖ Krzywe Béziera sklejane
- ❖ Krzywe Béziera dowolnego stopnia
- ❖ Powierzchnie Béziera
- ❖ Wymierne krzywe Béziera
- ❖ Bryła obrotowa

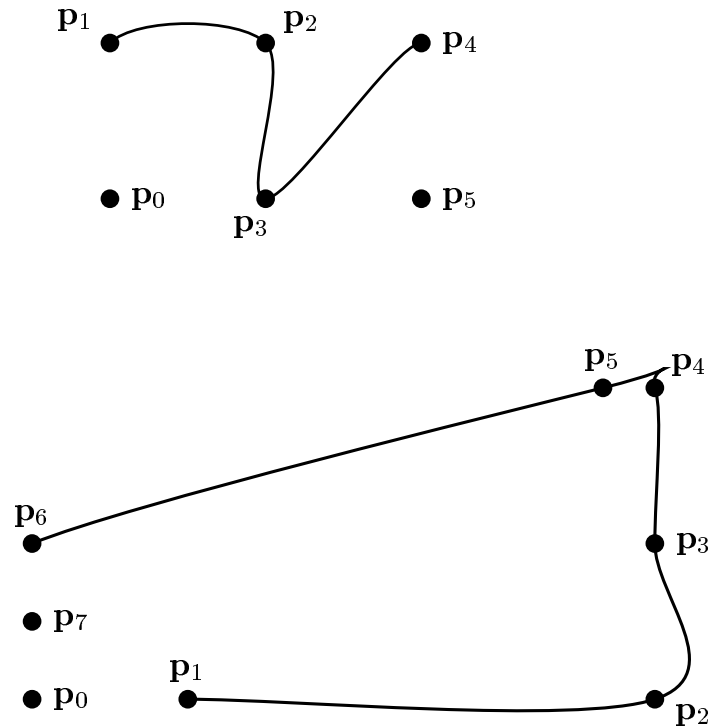


Figure VII.23: Two examples of Catmull-Rom splines with uniformly spaced knots.

Krzywe Béziera dowolnego stopnia

- ❖ Splajny
- ❖ Krzywe Béziera
- ❖ Algorytm de Casteljau
- ❖ Krzywe Béziera sklejane
- ❖ **Krzywe Béziera dowolnego stopnia**
- ❖ Powierzchnie Béziera
- ❖ Wymierne krzywe Béziera
- ❖ Bryła obrotowa

$$q(u) = \sum_{i=0}^k B_i^k(u) p_i$$

$$B_i^k(u) = \binom{k}{i} u^i (1-u)^{k-i},$$

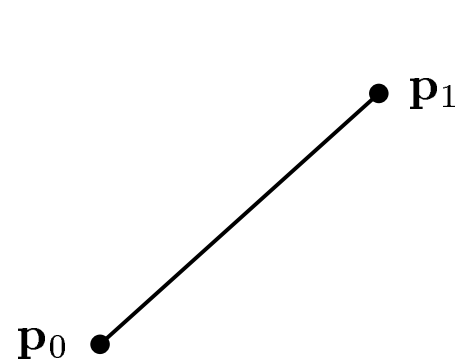
$$\sum_{i=0}^k B_i^k(u) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} u^i (1-u)^{k-i} = (u + (1-u))^k = 1,$$

$$q'(0) = k(p_1 - p_0),$$

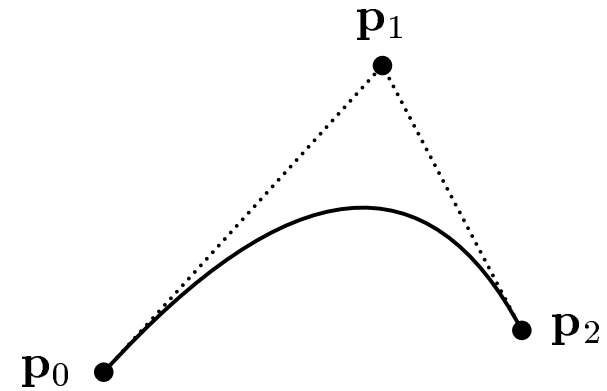
$$q'(1) = k(p_k - p_{k-1}).$$

Krzywe Béziera dowolnego stopnia

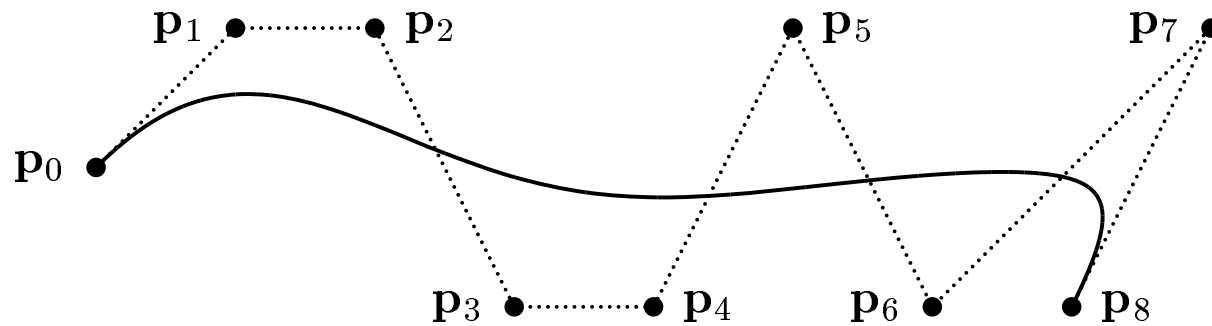
- ❖ Splajny
- ❖ Krzywe Béziera
- ❖ Algorytm de Casteljau
- ❖ Krzywe Béziera sklejane
- ❖ Krzywe Béziera dowolnego stopnia
- ❖ Powierzchnie Béziera
- ❖ Wymierne krzywe Béziera
- ❖ Bryła obrotowa



(a) Degree one



(b) Degree two



(c) Degree eight

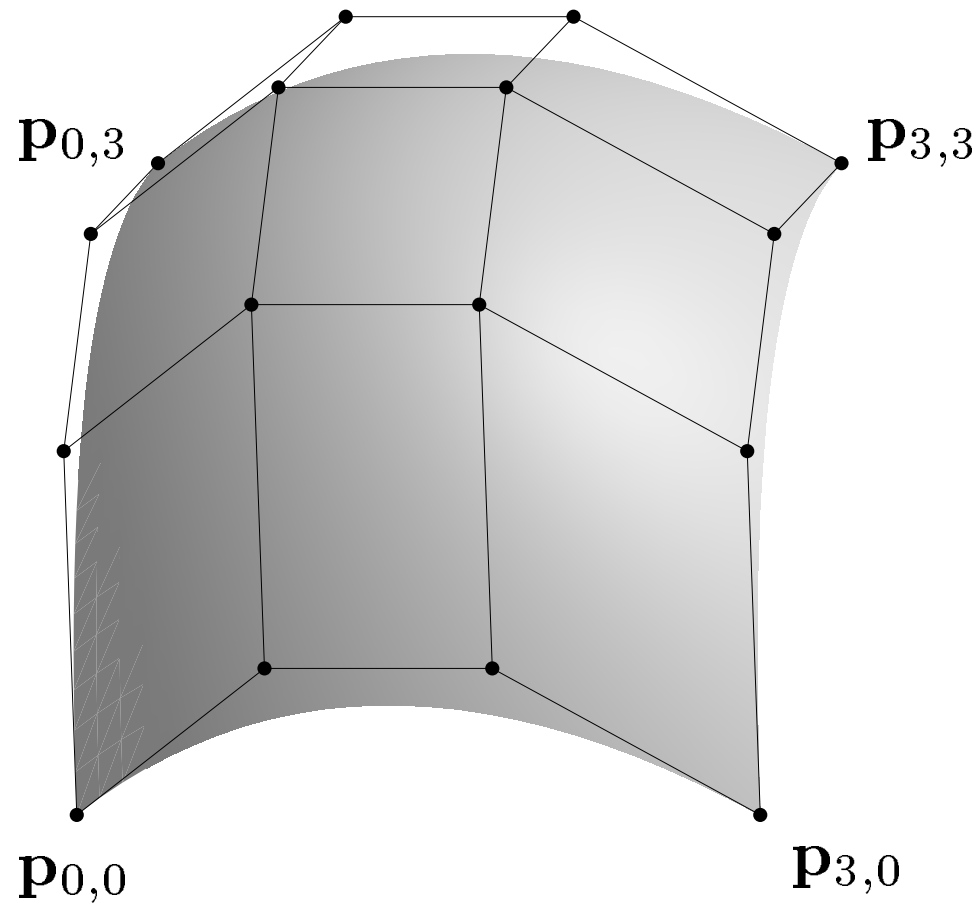
Podwyższenie stopnia

- ❖ Splajny
- ❖ Krzywe Béziera
- ❖ Algorytm de Casteljau
- ❖ Krzywe Béziera sklejane
- ❖ Krzywe Béziera dowolnego stopnia**
- ❖ Powierzchnie Béziera
- ❖ Wymierne krzywe Béziera
- ❖ Bryła obrotowa

$$\hat{P}_0 = P_0 \quad \hat{P}_{k+1} = P_k$$
$$\hat{P}_i = \frac{i}{k+1} P_{i-1} + \frac{k-i+1}{k+1} P_i$$

Powierzchnie Béziera

- ❖ Splajny
- ❖ Krzywe Béziera
- ❖ Algorytm de Casteljau
- ❖ Krzywe Béziera sklejane
- ❖ Krzywe Béziera dowolnego stopnia
- ❖ Powierzchnie Béziera
- ❖ Wymierne krzywe Béziera
- ❖ Bryła obrotowa



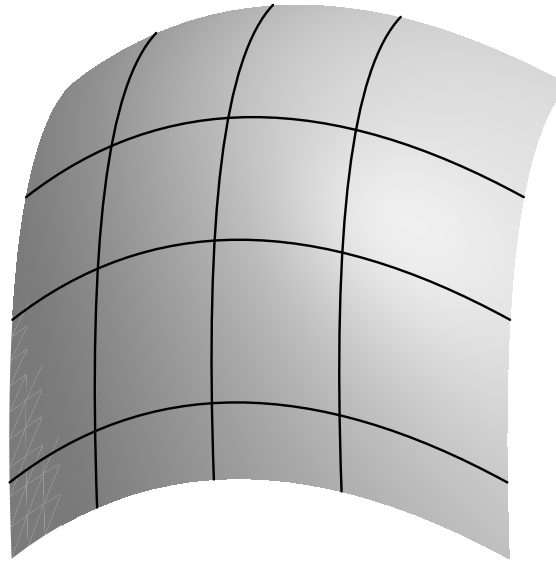
Powierzchnie Béziera trzeciego stopnia

- ❖ Splajny
- ❖ Krzywe Béziera
- ❖ Algorytm de Casteljau
- ❖ Krzywe Béziera sklejane
- ❖ Krzywe Béziera dowolnego stopnia
- ❖ Powierzchnie Béziera**
- ❖ Wymierne krzywe Béziera
- ❖ Bryła obrotowa

$$\begin{aligned} q(u, v) &= \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 B_i(u) B_j(v) p_{i,j} = \\ &= \sum_{i=0}^3 \left(B_i(u) \sum_{j=0}^3 B_j(v) p_{i,j} \right) = \\ &= \sum_{j=0}^3 B_j(v) \left(\sum_{i=0}^3 B_i(u) p_{i,j} \right), \\ (u, v) &\in [0, 1] \times [0, 1] \end{aligned}$$

Przekrój powierzchni Béziera

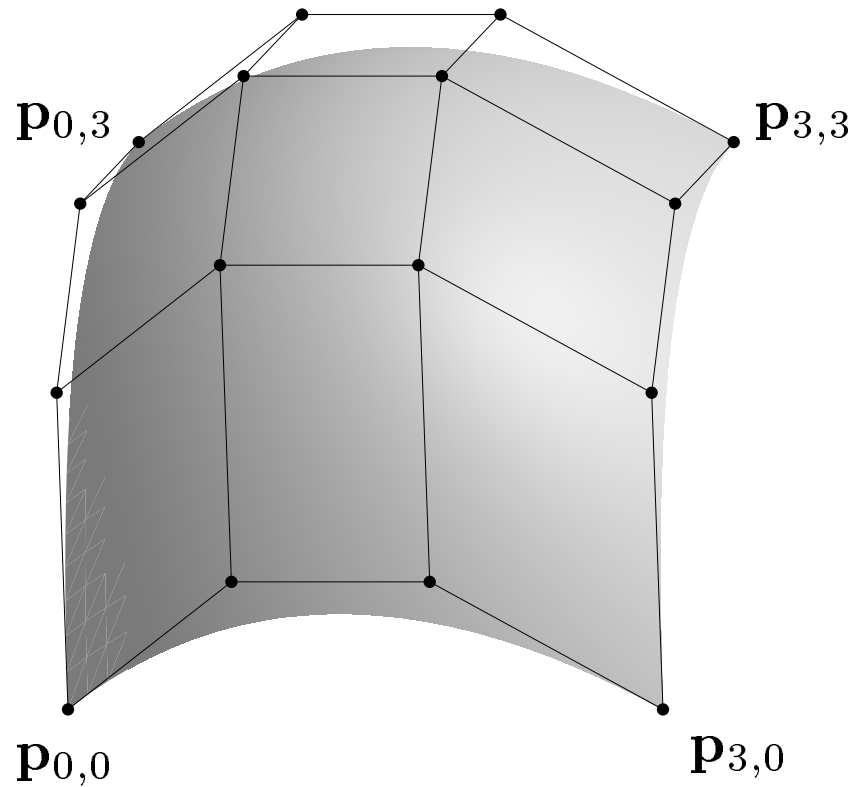
- ❖ Splajny
- ❖ Krzywe Béziera
- ❖ Algorytm de Casteljau
- ❖ Krzywe Béziera sklejane
- ❖ Krzywe Béziera dowolnego stopnia
- ❖ Powierzchnie Béziera
- ❖ Wymierne krzywe Béziera
- ❖ Bryła obrotowa



- $q(u, v) = \sum_{i=0}^3 \left(B_i(u) \sum_{j=0}^3 B_j(v) p_{i,j} \right)$
- $r_i = \sum_{j=0}^3 B_j(v) p_{i,j}, \quad s_j = \sum_{i=0}^3 B_i(u) p_{i,j}$

Graniczne linie powierzchni Béziera

- ❖ Splajny
- ❖ Krzywe Béziera
- ❖ Algorytm de Casteljau
- ❖ Krzywe Béziera sklejane
- ❖ Krzywe Béziera dowolnego stopnia
- ❖ Powierzchnie Béziera
- ❖ Wymierne krzywe Béziera
- ❖ Bryła obrotowa



- $v = 0, \quad u \in [0, 1]:$ granica „przednia”, $p_{i,0}$
- $u = 0, \quad v \in [0, 1]:$ granica „lewa”, $p_{0,j}$

Pochodne cząstkowe powierzchni Béziera

- ❖ Splajny
- ❖ Krzywe Béziera
- ❖ Algorytm de Casteljau
- ❖ Krzywe Béziera sklejane
- ❖ Krzywe Béziera dowolnego stopnia
- ❖ Powierzchnie Béziera
- ❖ Wymierne krzywe Béziera
- ❖ Bryła obrotowa

$$\frac{\partial q}{\partial v}(u, 0) = \sum_{i=0}^3 3B_i(u)(p_{i,1} - p_{i,0})$$

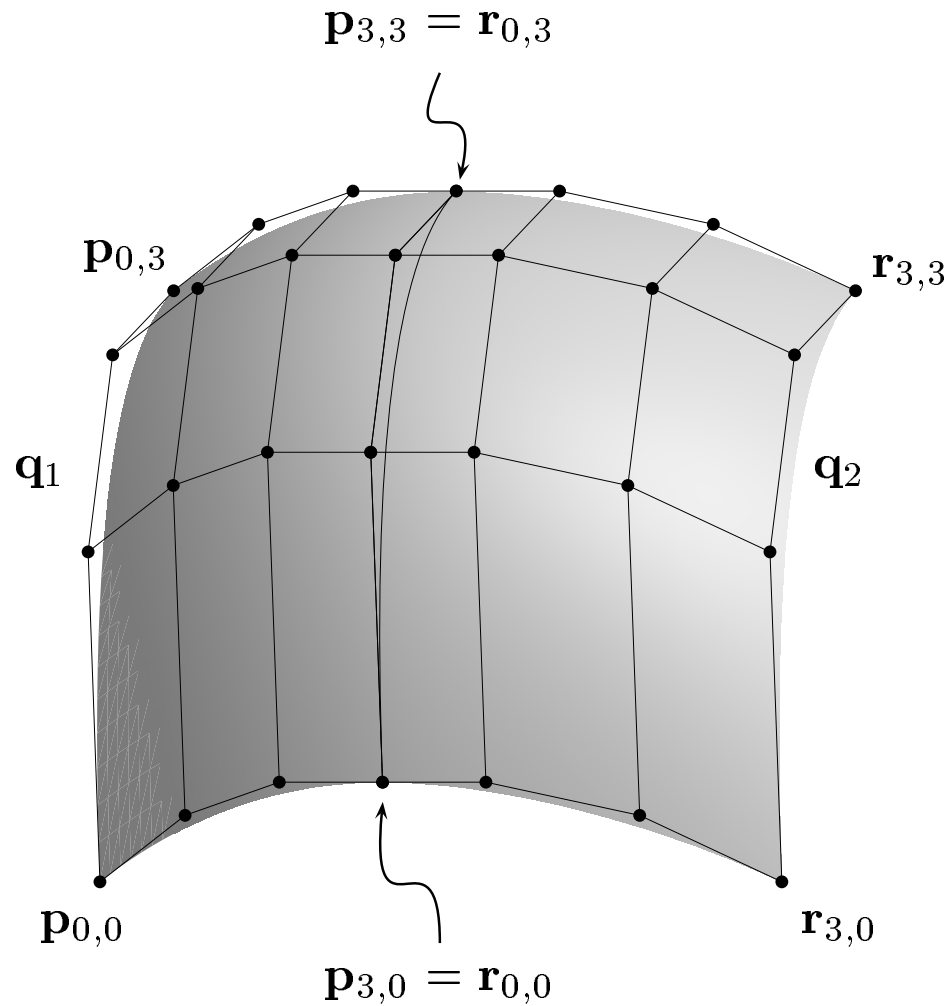
$$\frac{\partial q}{\partial v}(u, 1) = \sum_{i=0}^3 3B_i(u)(p_{i,3} - p_{i,2})$$

$$\frac{\partial q}{\partial u}(0, v) = \sum_{j=0}^3 3B_j(v)(p_{1,j} - p_{0,j})$$

$$\frac{\partial q}{\partial v}(1, v) = \sum_{j=0}^3 3B_j(v)(p_{3,j} - p_{2,j})$$

Sklejane powierzchnie Béziera

- ❖ Splajny
- ❖ Krzywe Béziera
- ❖ Algorytm de Castelja
- ❖ Krzywe Béziera sklejane
- ❖ Krzywe Béziera dowolnego stopnia
- ❖ Powierzchnie Béziera
- ❖ Wymierne krzywe Béziera
- ❖ Bryła obrotowa



Wymierne krzywe Béziera

- ❖ Splajny
- ❖ Krzywe Béziera
- ❖ Algorytm de Casteljau
- ❖ Krzywe Béziera sklejane
- ❖ Krzywe Béziera dowolnego stopnia
- ❖ Powierzchnie Béziera
- ❖ Wymierne krzywe Béziera
- ❖ Bryła obrotowa

$$p_i = (x : y : z : w),$$

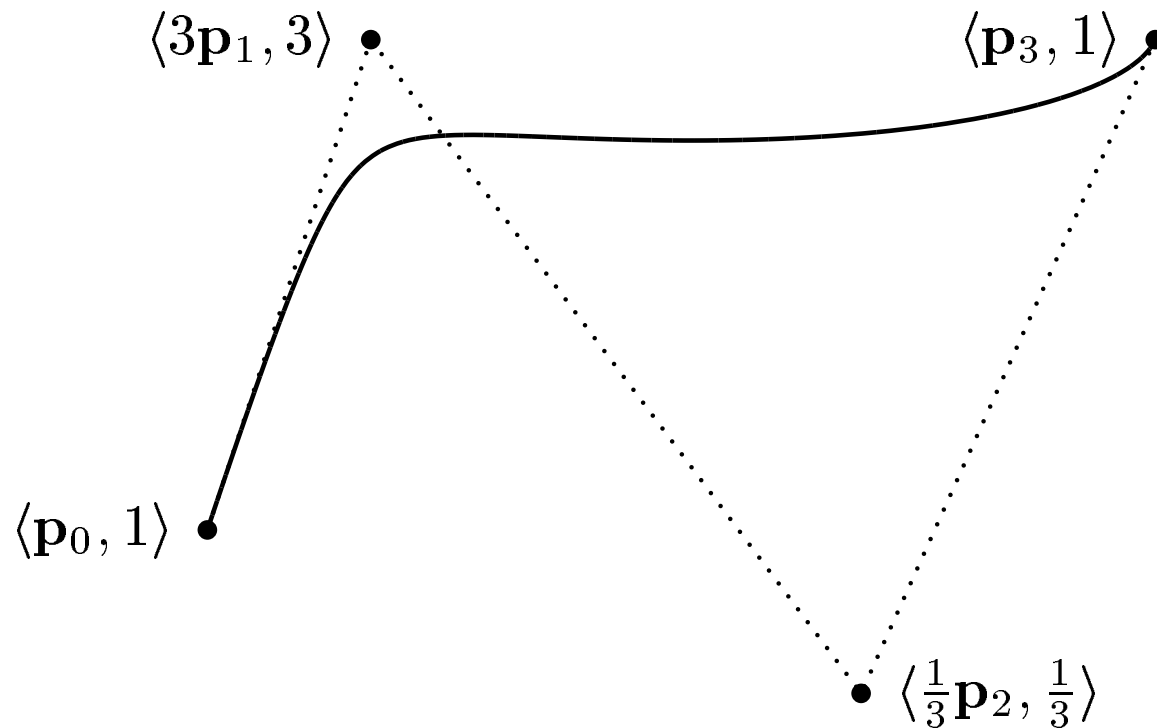
$$q(u) = \sum_i B_i^k(u) p_i$$

- współrzędna w pozwala na powiększenie wagi punktu kontrolnego
- modelowanie krzywych stożkowych
- rzut perspektywiczny krzywej wymiernej jest zawsze krzywą wymierną
- punkty kontrolne mogą być umieszczone w nieskończoności

Powiększenie wagi punktu kontrolnego

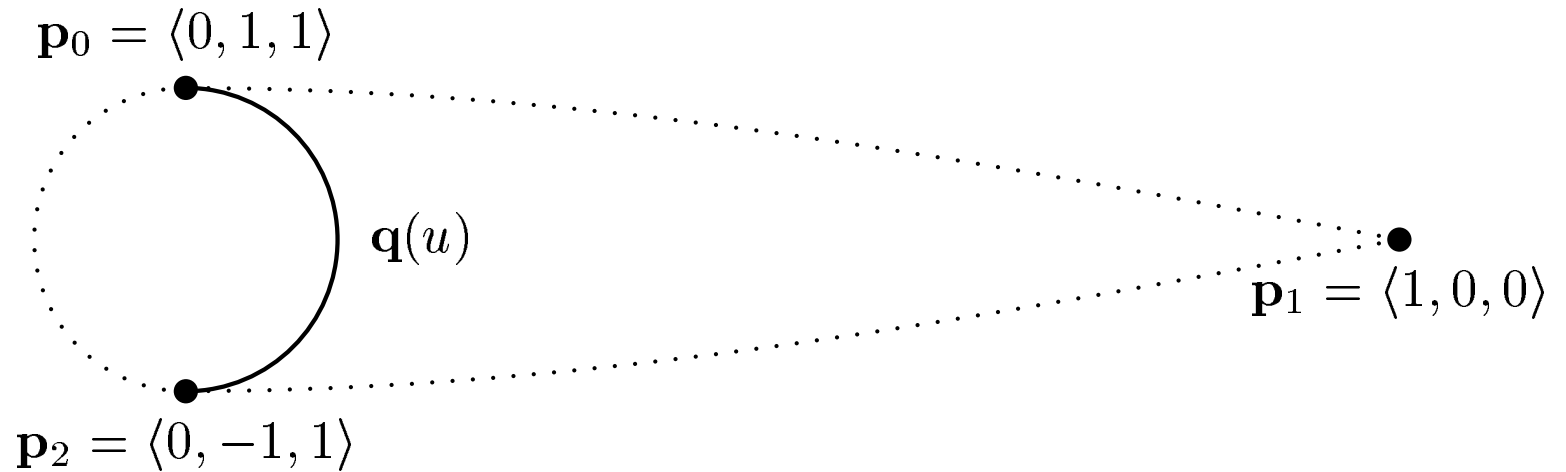
- ❖ Splajny
- ❖ Krzywe Béziera
- ❖ Algorytm de Casteljau
- ❖ Krzywe Béziera sklejane
- ❖ Krzywe Béziera dowolnego stopnia
- ❖ Powierzchnie Béziera
- ❖ Wymierne krzywe Béziera
- ❖ Bryła obrotowa

$$q(u) = \sum_i B_i^k(u)(w_i p_i : w_i) \sim \sum_i \frac{w_i B_i^k(u)}{\sum_j w_j B_j^k(u)} p_i$$



Okrąg

- ❖ Splajny
- ❖ Krzywe Béziera
- ❖ Algorytm de Casteljau
- ❖ Krzywe Béziera sklejane
- ❖ Krzywe Béziera dowolnego stopnia
- ❖ Powierzchnie Béziera
- ❖ Wymierne krzywe Béziera
- ❖ Bryła obrotowa

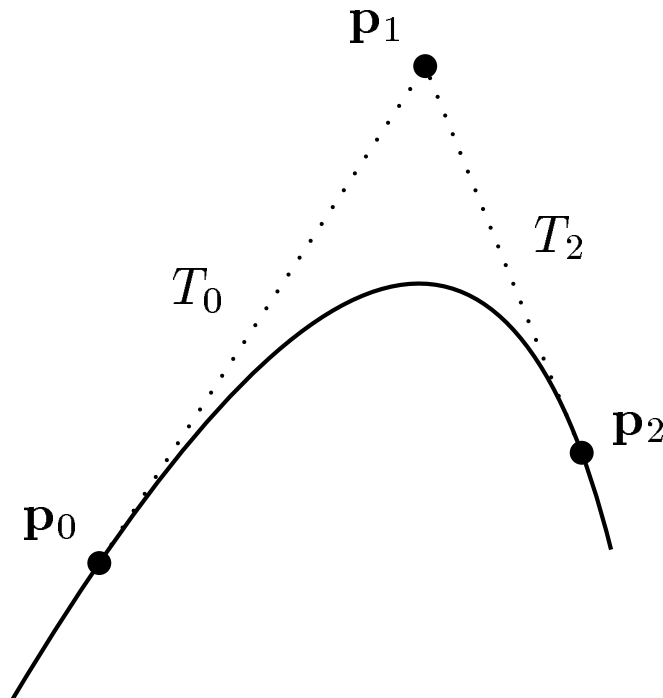


$$\begin{aligned} q(u) &= (1-u)^2 p_0 + 2u(1-u)p_1 + u^2 p_2 = \\ &= (2u(1-u) : (1-u)^2 - u^2 : (1-u)^2 + u^2) \sim \\ &\sim \left(\frac{2u(1-u)}{(1-u)^2 + u^2}, \frac{(1-u)^2 - u^2}{(1-u)^2 + u^2} \right) \end{aligned}$$

Krzywe stożkowe

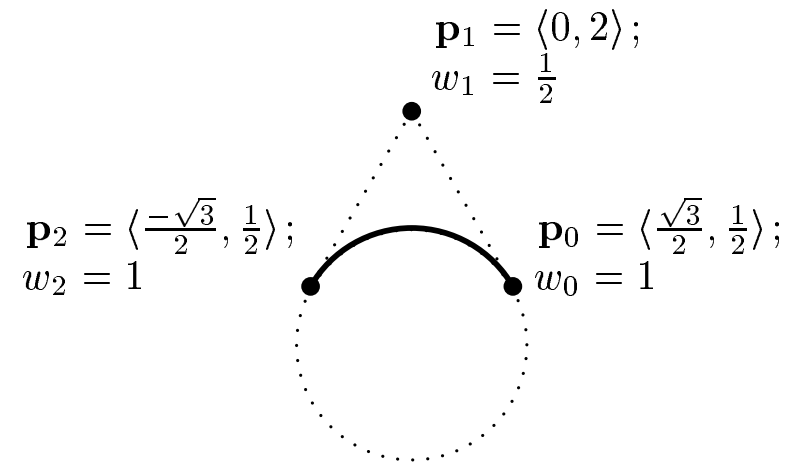
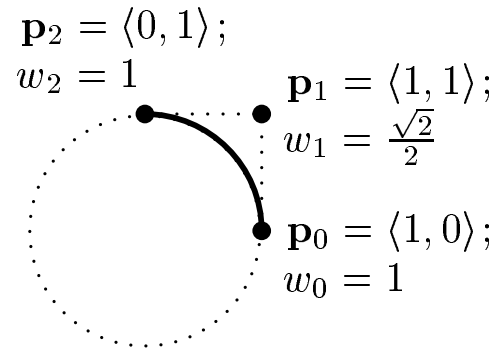
- ❖ Splajny
- ❖ Krzywe Béziera
- ❖ Algorytm de Casteljau
- ❖ Krzywe Béziera sklejane
- ❖ Krzywe Béziera dowolnego stopnia
- ❖ Powierzchnie Béziera
- ❖ Wymierne krzywe Béziera
- ❖ Bryła obrotowa

Twierdzenie 3. Niech T_0 i T_2 będą st stycznymi do krzywej stożkowej C w punktach p_0 i p_2 , p_1 będzie punktem przecięcia T_0 i T_2 . Wtedy istnieje waga $w \geq 0$ taka, że wymierna krzywa Béziera o punktach kontrolnych $(p_0 : 1)$, $(p_1 : w)$, $(p_2 : 1)$ generuje odcinek krzywej C pomiędzy p_0 a p_2 .



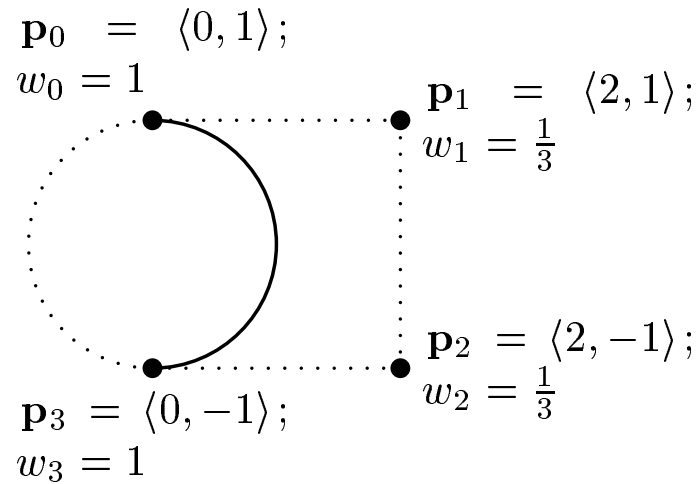
Krzywe stożkowe

- ❖ Splajny
- ❖ Krzywe Béziera
- ❖ Algorytm de Casteljau
- ❖ Krzywe Béziera sklejane
- ❖ Krzywe Béziera dowolnego stopnia
- ❖ Powierzchnie Béziera
- ❖ Wymierne krzywe Béziera
- ❖ Bryła obrotowa



Półokrąg jako krzywa trzeciego stopnia

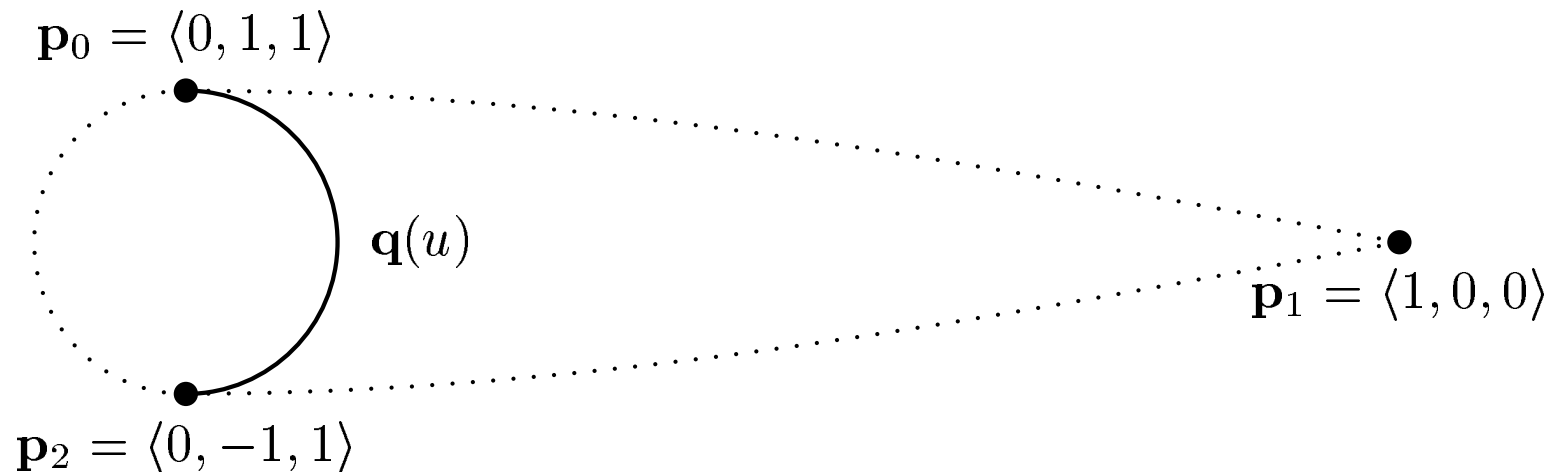
- ❖ Splajny
- ❖ Krzywe Béziera
- ❖ Algorytm de Casteljau
- ❖ Krzywe Béziera sklejane
- ❖ Krzywe Béziera dowolnego stopnia
- ❖ Powierzchnie Béziera
- ❖ Wymierne krzywe Béziera
- ❖ Bryła obrotowa



Okrąg o promieniu 2

- ❖ Splajny
- ❖ Krzywe Béziera
- ❖ Algorytm de Casteljau
- ❖ Krzywe Béziera sklejane
- ❖ Krzywe Béziera dowolnego stopnia
- ❖ Powierzchnie Béziera
- ❖ Wymierne krzywe Béziera
- ❖ Bryła obrotowa

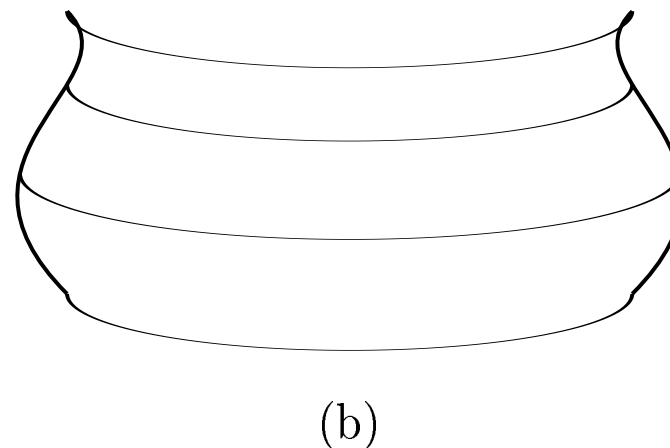
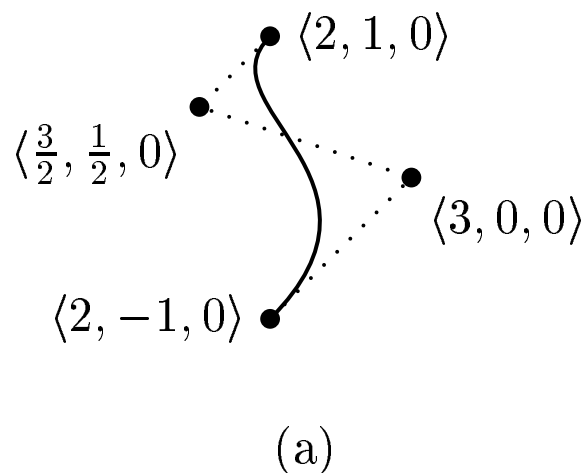
$$(p_0, p_1, p_2) \mapsto (p_0^* = Mp_0, p_1^* = Mp_1, p_2^* = Mp_2)$$



Bryła obrotowa

- ❖ Splajny
- ❖ Krzywe Béziera
- ❖ Algorytm de Casteljau
- ❖ Krzywe Béziera sklejane
- ❖ Krzywe Béziera dowolnego stopnia
- ❖ Powierzchnie Béziera
- ❖ Wymierne krzywe Béziera

❖ Bryła obrotowa



$(-2 : 1 : 0 : 1)$	$(0 : 0 : 2 : 0)$	$(2 : 1 : 0 : 1)$
$(-\frac{3}{2} : \frac{1}{2} : 0 : 1)$	$(0 : 0 : \frac{3}{2} : 0)$	$(\frac{3}{2} : \frac{1}{2} : 0 : 1)$
$(-3 : 0 : 0 : 1)$	$(0 : 0 : 3 : 0)$	$(3 : 0 : 0 : 1)$
$(-2 : -1 : 0 : 1)$	$(0 : 0 : 2 : 0)$	$(2 : -1 : 0 : 1)$