

Modelowanie i Wizualizowanie 3W grafiki. Wprowadzenie do Animacji. Sterowanie ruchem

Aleksander Denisiuk
Uniwersytet Warmińsko-Mazurski
Olsztyn, ul. Słoneczna 54
denisjuk@matman.uwm.edu.pl

Wprowadzenie do Animacji. Sterowanie ruchem

Zagadnienie Interpolacji

Sterowanie Ruchem

Animacja Orientacji

Wykorzystanie Ścieżek

Najnowsza wersja tego dokumentu dostępna jest pod adresem

<http://wmii.uwm.edu.pl/~denisjuk/uwm>

Zagadnienie Interpolacji

- Zagadnienie interpolacji

Sterowanie Ruchem

Animacja Orientacji

Wykorzystanie Ścieżek

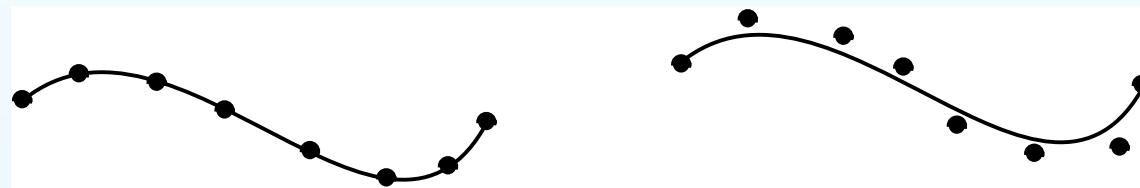
Zagadnienie Interpolacji

Zagadnienie interpolacji

- Dane są wartości parametrów w klatkach kluczowych
 - współrzędne położenia, kąt nachylenia, obrót ręki robota, etc
- Określić wartości w klatkach pośrednich
 - rozpędzanie i spowalnianie, ciągłość

Interpolacja a aproksymacja

- Interpolacja: krzywe przechodzą dokładnie przez punkty
 - krzywe sklejące, interpolacja Hermite'a
- Aproksymacja: dane są punkty kontrolne
 - krzywe Béziera, B-sklejące



Złożoność funkcji

- Wielomiany trzeciego stopnia
 - można podawać położenia i prędkości punktów końcowych
- Wielomiany niższego stopnia
 - nie mają punktów przegięcie
 - krzywe są płaskie
- Wielomiany wyższego stopnia
 - nie dają istotnych korzyści
 - są bardziej skomplikowane obliczeniowo

Ciągłość

Zagadnienie Interpolacji

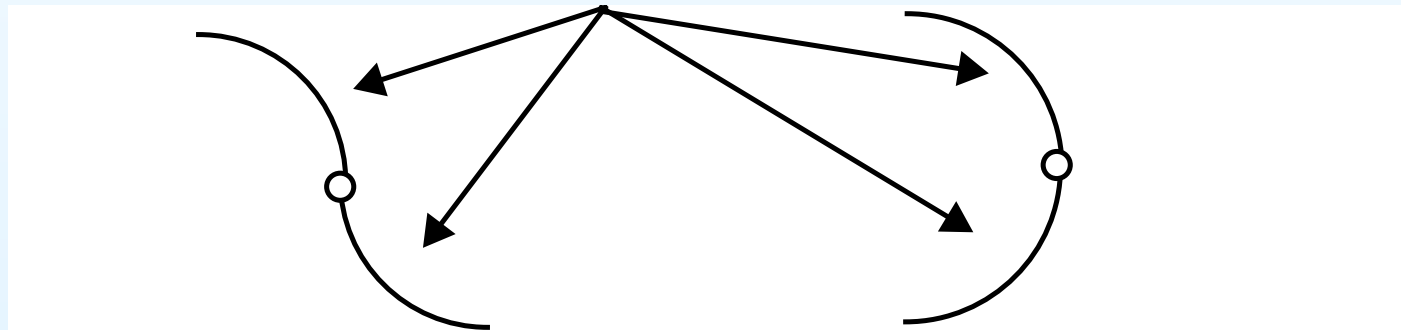
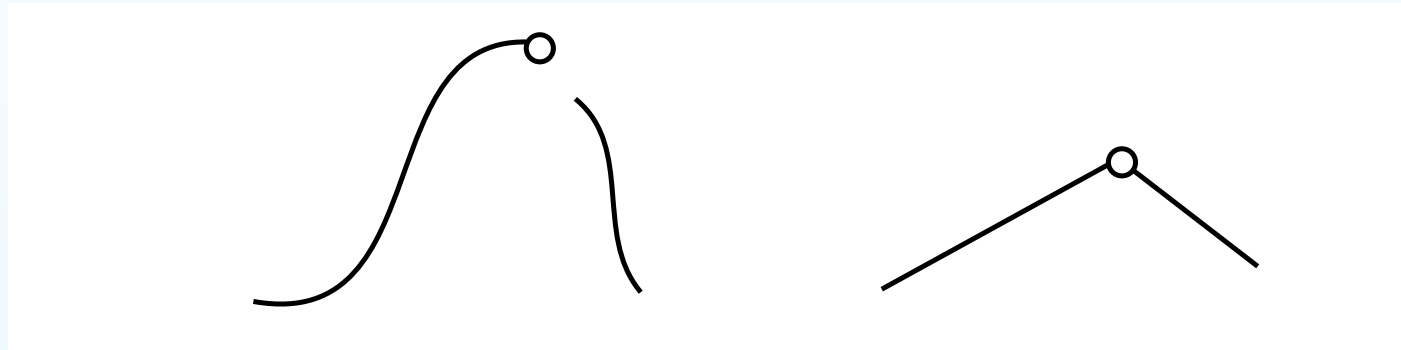
• Zagadnienie
interpolacji

Sterowanie Ruchem

Animacja Orientacji

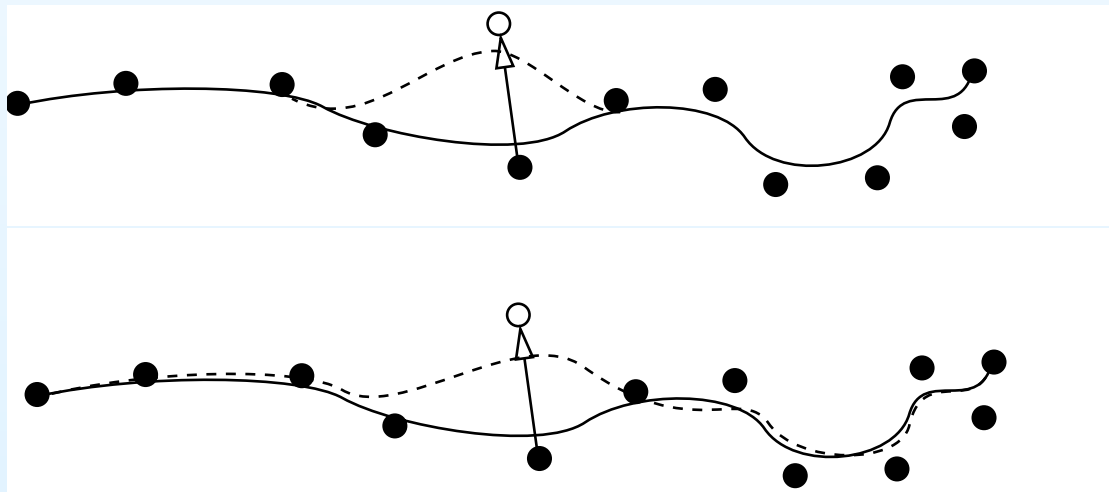
Wykorzystanie Ścieżek

- Ciągłość zerowego rzędu
- Ciągłość pierwszego rzędu: ciągły kierunek stycznej (prędkość)
- Ciągłość drugiego rzędu: ciągła krzywizna (przyśpieszenie)



Globalna i lokalna kontrola kształtu

- Kontrola lokalna
 - zmiana jednego punktu ma wpływ na ograniczoną część
 - splajny Catmulla-Roma, sklejane parabole, B-spline
- Kontrola globalna
 - zmiana jednego punktu ma wpływ na całą krzywą
 - interpolacja Lagrange'a



Zagadnienie Interpolacji

Sterowanie Ruchem

- Sterowanie ruchem
- Obliczanie długości łuku
- Metody numeryczne
- Sterowanie prędkością
- Rozpędzanie i zatrzymanie
- Ogólne funkcje odległości

Animacja Orientacji

Wykorzystanie Ścieżek

Sterowanie Ruchem

Sterowanie ruchem punktu wzdłuż krzywej

Zagadnienie Interpolacji

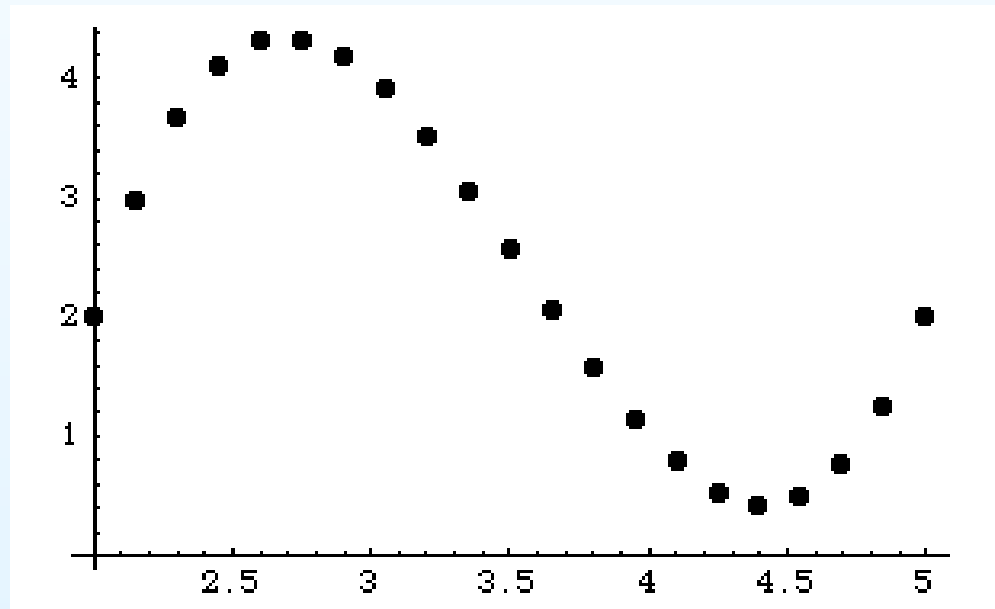
Sterowanie Ruchem

- **Sterowanie ruchem**
- Obliczanie długości łuku
- Metody numeryczne
- Sterowanie prędkością
- Rozpędzanie i zatrzymanie
- Ogólne funkcje odległości

Animacja Orientacji

Wykorzystanie Ścieżek

- Określona jest funkcja interpolacyjna $P(u) \in \mathbb{R}^3$
 - równomierna zmiana parametru u nie oznacza ruchu ze stałą prędkością
 - parametryzacja łukowa $s = s(u)$, $\text{length}(u_1, u_2)$



Obliczanie analityczne

Zagadnienie Interpolacji

Sterowanie Ruchem

- Sterowanie ruchem
- Obliczanie długości łuku
- Metody numeryczne
- Sterowanie prędkością
- Rozpędzanie i zatrzymanie
- Ogólne funkcje odległości

Animacja Orientacji

Wykorzystanie Ścieżek

- $\text{length}(u_1, u_2) = \int_{u_1}^{u_2} |\dot{P}(u)| du = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{\left(\frac{dx(u)}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy(u)}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz(u)}{du}\right)^2} du$
 - krzywa kubiczna
 - płaska krzywa kwadratowa

Przybliżone obliczanie

Zagadnienie Interpolacji

Sterowanie Ruchem

- Sterowanie ruchem
- Obliczanie długości łuku
- Metody numeryczne
- Sterowanie prędkością
- Rozpędzanie i zatrzymanie
- Ogólne funkcje odległości

Animacja Orientacji

Wykorzystanie Ścieżek

- Dane są węzły $u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_n$
- Obliczamy $P(u_0), \dots, P(u_n)$
- Tablica odległości:
 - $G(0) = 0,$
 - $G(1) = \text{dist}(P_0, P_1),$
 - $G(2) = G(1) + \text{dist}(P_1, P_2),$
 - etc
- Dla oszacowania długości używana jest interpolacja liniowa
- $\text{length}(u_1, u_2) \approx G(u_2) - G(u_1)$

Przykład

Zagadnienie Interpolacji

Sterowanie Ruchem

- Sterowanie ruchem
- **Obliczanie długości łuku**
- Metody numeryczne
- Sterowanie prędkością
- Rozpędzanie i zatrzymanie
- Ogólne funkcje odległości

Animacja Orientacji

Wykorzystanie Ścieżek

i	u	G
0	0,00	0,000
1	0,05	0,080
2	0,10	0,150
3	0,15	0,230
4	0,20	0,320
5	0,25	0,400
6	0,30	0,500
7	0,35	0,600
8	0,40	0,720
9	0,45	0,800
10	0,50	0,860

i	u	G
11	0,55	0,900
12	0,60	0,150
13	0,65	0,920
14	0,70	0,932
15	0,75	0,944
16	0,80	0,959
17	0,85	0,972
18	0,90	0,984
19	0,95	0,998
20	1,00	1,000

- $s(0,73) \approx 0,953$
- $u(0,75) \approx 0,41875$

Błędy obliczeniowe

Zagadnienie Interpolacji

Sterowanie Ruchem

- Sterowanie ruchem
- Obliczanie długości łuku

- Metody numeryczne
- Sterowanie prędkością
- Rozpędzanie i zatrzymanie
- Ogólne funkcje odległości

Animacja Orientacji

Wykorzystanie Ścieżek

- Gęstsze tablicowanie
- Interpolacja wyższego rzędu
- Adaptacja

$$\left| \|P(0) - P(1)\| - \left(\|P(0) - P\left(\frac{1}{2}\right)\| + \|P\left(\frac{1}{2}\right) - P(1)\| \right) \right| < \varepsilon$$

Całkowanie numeryczne

Zagadnienie Interpolacji

Sterowanie Ruchem

- Sterowanie ruchem
- Obliczanie długości łuku
- **Metody numeryczne**
- Sterowanie prędkością
- Rozpędzanie i zatrzymanie
- Ogólne funkcje odległości

Animacja Orientacji

Wykorzystanie Ścieżek

- Kwadratura Gaussa $\int_{-1}^1 f(u) du \approx \sum_i w_i f(i)$
- Dowolny przedział
- Adaptacja

Zagadnienie Interpolacji

Sterowanie Ruchem

- Sterowanie ruchem
- Obliczanie długości łuku

• **Metody numeryczne**

- Sterowanie prędkością
- Rozpędzanie i zatrzymanie
- Ogólne funkcje odległości

Animacja Orientacji

Wykorzystanie Ścieżek

Rozwiązywanie równań

- $\text{length}(u_0, u) = s$
- Metoda Newtona $f(t) = 0$

$$t_{n+1} = t_n - \frac{f(t_n)}{f'(t_n)}$$

- Metoda siecznych
- Wyszukiwanie binarne

Zagadnienie Interpolacji

Sterowanie Ruchem

- Sterowanie ruchem
- Obliczanie długości łuku
- Metody numeryczne
- **Sterowanie prędkością**
- Rozpędzanie i zatrzymanie
- Ogólne funkcje odległości

Animacja Orientacji

Wykorzystanie Ścieżek

Sterowanie prędkością

- $s(t)$, gdzie t —czas
- Ruch ze stałą prędkością
 - $s(t)$ jest funkcją liniową
- ease-in/ease-out
 - $P(u(s(t)))$
- Funkcja odległości powinna być monotoniczna
- Funkcja odległości powinna być ciągła
- Normalizacja: $s \in [0, 1], t \in [0, 1]$

$\sin t$

Zagadnienie Interpolacji

Sterowanie Ruchem

- Sterowanie ruchem
- Obliczanie długości łuku
- Metody numeryczne
- Sterowanie prędkością
- **Rozpędzanie i zatrzymanie**
- Ogólne funkcje odległości

Animacja Orientacji

Wykorzystanie Ścieżek

- $s(t) = \text{ease}(t) = \frac{\sin(\pi t - \frac{\pi}{2}) + 1}{2}$

Fragmenty funkcji sinusoidalnej

Zagadnienie Interpolacji

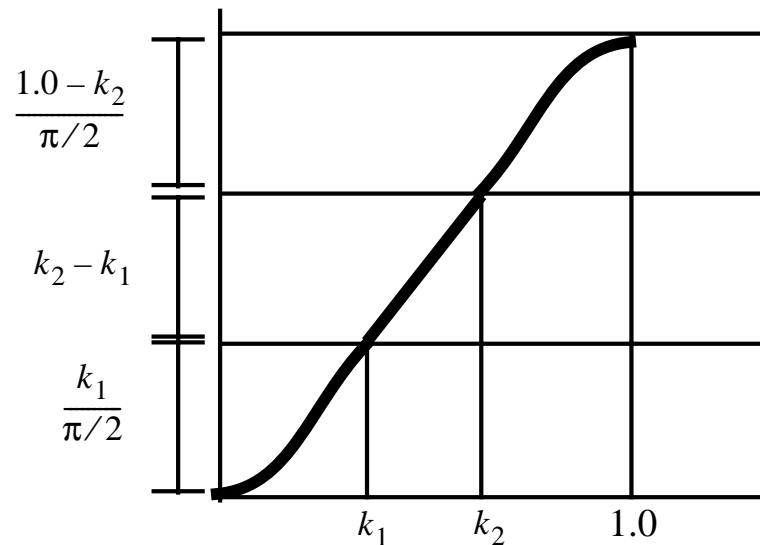
Sterowanie Ruchem

- Sterowanie ruchem
- Obliczanie długości łuku
- Metody numeryczne
- Sterowanie prędkością
- **Rozpędzanie i zatrzymanie**
- Ogólne funkcje odległości

Animacja Orientacji

Wykorzystanie Ścieżek

- $\text{ease}(t) = \begin{cases} \frac{2k_1}{\pi f} \left(\sin\left(\frac{\pi t}{2k_1} - \frac{\pi}{2}\right) + 1 \right), & \text{dla } t < k_1 \\ \left(\frac{2k_1}{\pi} + t - k_1 \right) / f, & \text{dla } k_1 \leq t < k_2 \\ \left(\frac{2k_1}{\pi} + k_2 - k_1 + \frac{2(1-k_2)}{\pi} \sin\left(\frac{\pi(t-k_2)}{2(1-k_2)}\right) \right) / f, & \text{dla } k_2 \leq t \end{cases}$
gdzie $f = 2k_1/\pi + k_2 - k_1 + 2(1 - k_2)/\pi$.



Wielomian trzeciego stopnia

Zagadnienie Interpolacji

Sterowanie Ruchem

- Sterowanie ruchem
- Obliczanie długości łuku
- Metody numeryczne
- Sterowanie prędkością
- **Rozpędzanie i zatrzymanie**
- Ogólne funkcje odległości

Animacja Orientacji

Wykorzystanie Ścieżek

- $\text{ease}(t) = -2t^3 + 3t^2$
- Styczne w końcach przedziału $[0, 1]$ są poziome
- brak przedziału ze stałą prędkością

Stałe przyspieszenie

Zagadnienie Interpolacji

Sterowanie Ruchem

- Sterowanie ruchem
- Obliczanie długości łuku
- Metody numeryczne
- Sterowanie prędkością
- **Rozpędzanie i zatrzymanie**
- Ogólne funkcje odległości

Animacja Orientacji

Wykorzystanie Ścieżek

$$\begin{aligned} \bullet \quad a(t) &= \begin{cases} a_+ & \text{dla } 0 < t < t_1, \\ 0 & \text{dla } t_1 < t < t_2, \\ a_- & \text{dla } t_2 < t < 1. \end{cases} \\ \bullet \quad v(t) &= \begin{cases} v_0 \frac{t}{t_1} & \text{dla } 0 < t < t_1, \\ v_0 & \text{dla } t_1 < t < t_2, \\ v_0 \left(1 - \frac{t-t_2}{1-t_2}\right) & \text{dla } t_2 < t < 1. \end{cases} \\ \bullet \quad s(t) &= \begin{cases} v_0 \frac{t^2}{2t_1} & \text{dla } 0 < t < t_1, \\ v_0 \frac{t_1}{2} + v_0(t - t_1) & \text{dla } t_1 < t < t_2, \\ v_0 \frac{t_1^2}{2} + v_0(t - t_1) + v_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{t-t_2}{1-t_2}\right) (t - t_1) & \text{dla } t_2 < t < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Dopasowanie do danej prędkości

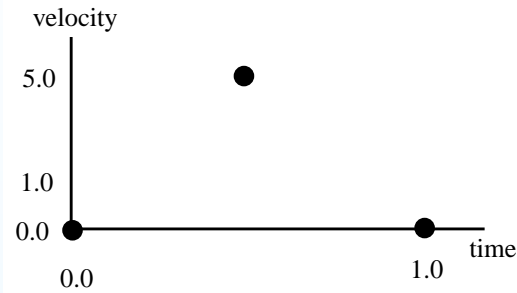
Zagadnienie Interpolacji

Sterowanie Ruchem

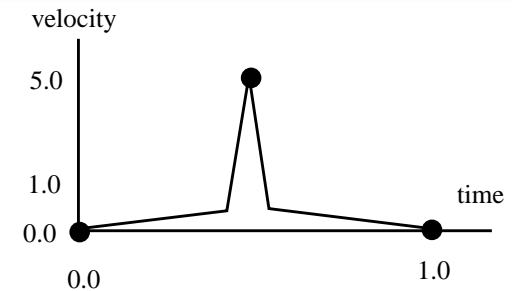
- Sterowanie ruchem
- Obliczanie długości łuku
- Metody numeryczne
- Sterowanie prędkością
- Rozpędzanie i zatrzymanie
- **Ogólne funkcje odległości**

Animacja Orientacji

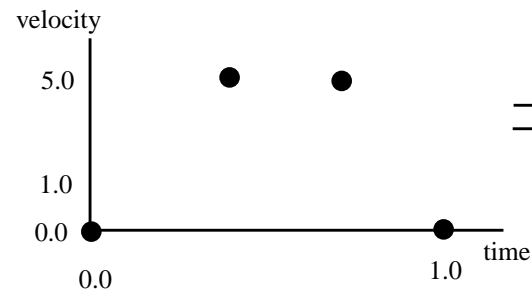
Wykorzystanie Ścieżek



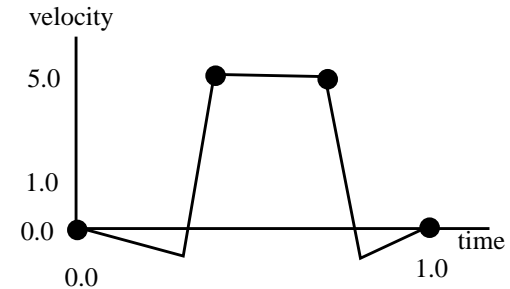
User specified velocities



Possible solution to enforce total distance covered equal to one



User specified velocities



Possible solution to enforce total distance covered (signed area under the curve) equal to one

Przykłady funkcji odległości

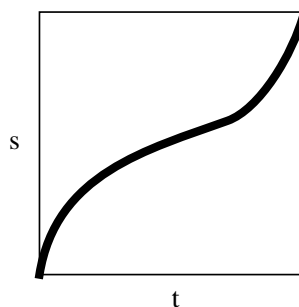
Zagadnienie Interpolacji

Sterowanie Ruchem

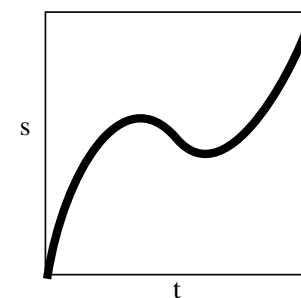
- Sterowanie ruchem
- Obliczanie długości łuku
- Metody numeryczne
- Sterowanie prędkością
- Rozpędzanie i zatrzymanie
- **Ogólne funkcje odległości**

Animacja Orientacji

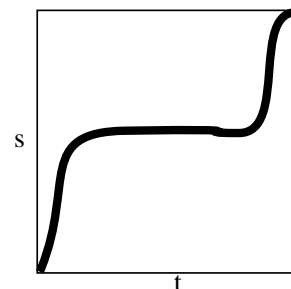
Wykorzystanie Ścieżek



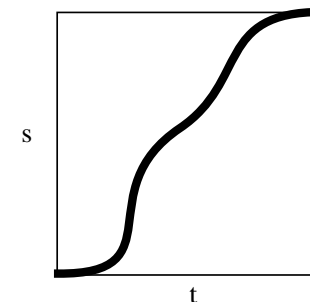
a) starts and ends abruptly



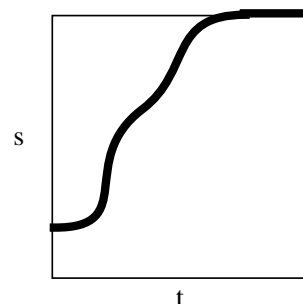
b) backs up



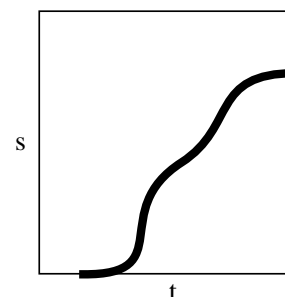
c) stalls



d) smoothly starts and stops



e) starts part way along the curve and gets to the end before $t=1.0$



f) waits awhile before starting and doesn't get all the way to the end

Warunki na ruch

Zagadnienie Interpolacji

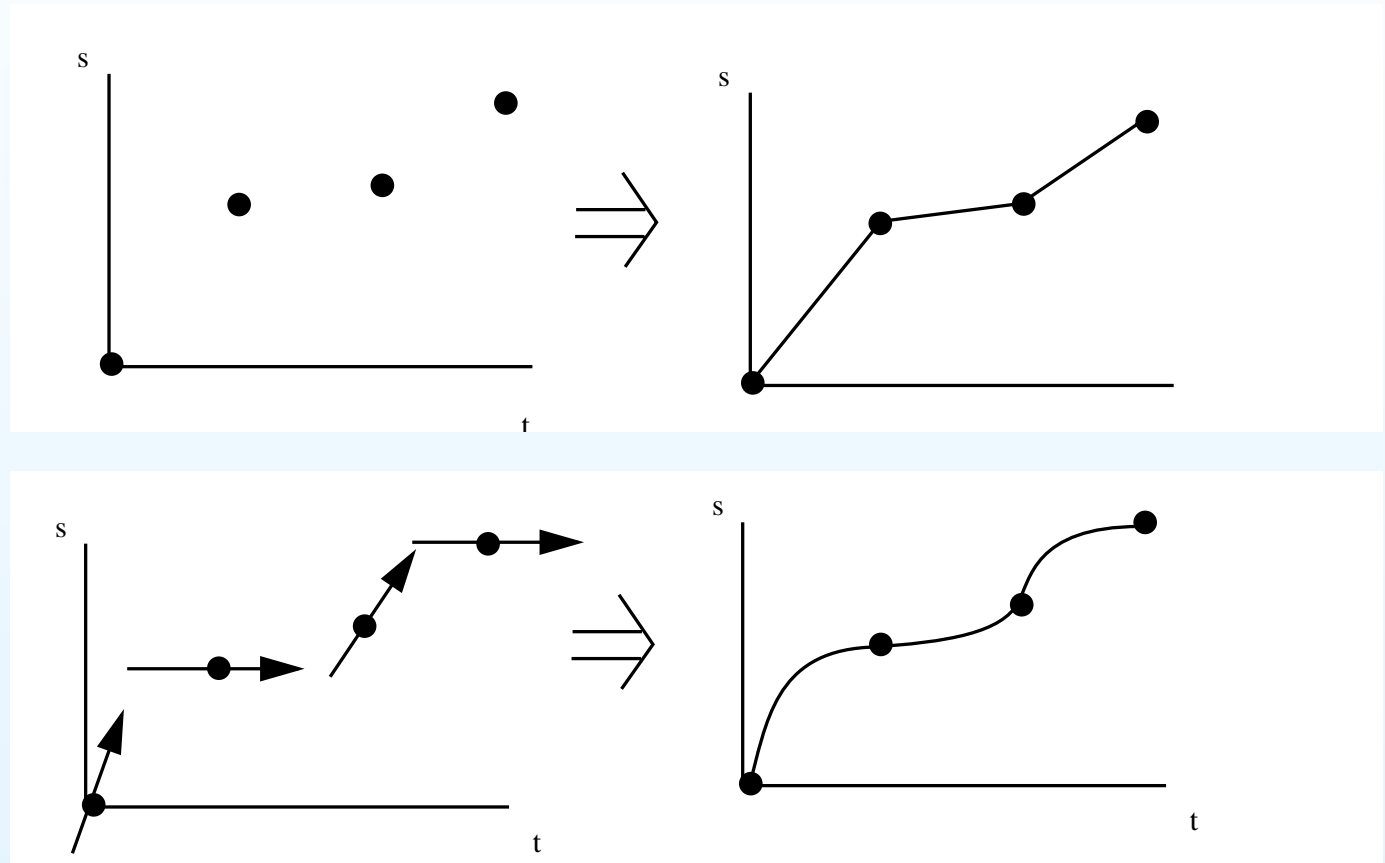
Sterowanie Ruchem

- Sterowanie ruchem
- Obliczanie długości łuku
- Metody numeryczne
- Sterowanie prędkością
- Rozpędzanie i zatrzymanie
- **Ogólne funkcje odległości**

Animacja Orientacji

Wykorzystanie Ścieżek

- (t_i, s_i, v_i, a_i)



Dopasowanie do par położenie-czas

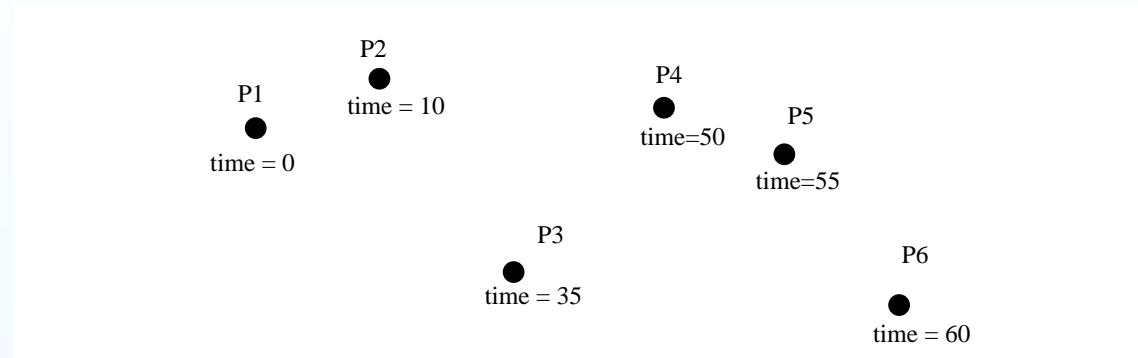
Zagadnienie Interpolacji

Sterowanie Ruchem

- Sterowanie ruchem
- Obliczanie długości łuku
- Metody numeryczne
- Sterowanie prędkością
- Rozpędzanie i zatrzymanie
- **Ogólne funkcje odległości**

Animacja Orientacji

Wykorzystanie Ścieżek



- Warunki $(P_i, t_i), i = 1, \dots, j$.
- Krzywe B-sklejane $P(t) = \sum_{l=1}^{n+1} B_l N_{l,k}(t), 2 \leq k \leq n+1 \leq j$
- Układ $P = NB$
 - $B = N^{-1}P$
- Regularyzacja
 - $N^T P = N^T N B$
 - $B = (N^T N)^{-1} N^T P$

Zagadnienie Interpolacji

Sterowanie Ruchem

Animacja Orientacji

- Macierz obrotu
- Kąty Eulera
- Kwanterniony
- Interpolacja kwaternionów

Wykorzystanie Ścieżek

Animacja Orientacji

Zagadnienie Interpolacji

Sterowanie Ruchem

Animacja Orientacji

● **Macierz obrotu**

● Kąty Eulera

● Kwanterniony

● Interpolacja
kwaternionów

Wykorzystanie Ścieżek

Modelowanie orientacji. Macierz obrotu

$$\bullet \quad \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Kąty Eulera: odchylenie, pochylenie, przechylenie

Zagadnienie Interpolacji

Sterowanie Ruchem

Animacja Orientacji

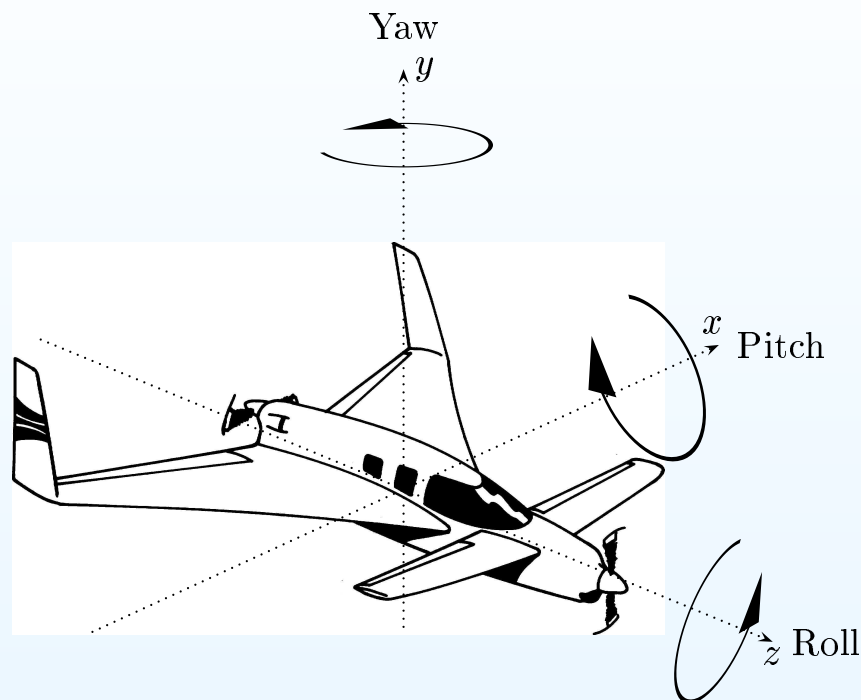
- Macierz obrotu

- **Kąty Eulera**

- Kwanterniony

- Interpolacja kwaternionów

Wykorzystanie Ścieżek



- $R = R_{\theta_y, j} \circ R_{\theta_p, i} \circ R_{\theta_r, k}$
- $$M_R = \begin{pmatrix} s_y s_p s_r + c_y c_r & s_y s_p c_r - c_y c_p & s_y c_p \\ c_p s_r & c_p c_r & -s_p \\ c_y s_p s_r - s_y c_r & c_y s_p c_r + s_y c_r & c_y c_p \end{pmatrix}$$
- $c_p = \cos \theta_p$, etc.

Ewentualne problemy interpolacji

- Interpolacja kątów, okres 360° .
 - interpolacja od 170° do -170° a interpolacja od 170° do 190°
- niejednoznaczna reprezentacja obrotu:
 - $\theta'_y = \theta_y \pm 180^\circ$
 - $\theta'_p = -\theta_p \pm 180^\circ$
 - $\theta'_r = \theta_r \pm 180^\circ$
- Blokada przegubu
 - interpolacja od $(0^\circ, 0^\circ, 0^\circ)$ do $(90^\circ, -90^\circ, -90^\circ)$
 - pozycja pośrednia $(45^\circ, -45^\circ, -45^\circ)$
 - [Zobacz](#)

Zagadnienie Interpolacji

Sterowanie Ruchem

Animacja Orientacji

• Macierz obrotu

• Kąty Eulera

• **Kwaterniony**

• Interpolacja
kwaternionów

Wykorzystanie Ścieżek

Ciało kwaternionów \mathbb{Q}

- $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$
- $$\begin{cases} i^2 = -1, & ij = k, & ik = -j, \\ ji = -k, & j^2 = -1, & jk = i, \\ ki = j, & kj = -i, & k^2 = -1. \end{cases}$$
- $\|q\| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2},$
- $q^* = q_0 - q_1i - q_2j - q_3k,$
- $q^{-1} = \frac{1}{\|q\|^2} q^*,$

Zagadnienie Interpolacji

Sterowanie Ruchem

Animacja Orientacji

• Macierz obrotu

• Kąty Eulera

• **Kwaterniony**

• Interpolacja
kwaternionów

Wykorzystanie Ścieżek

Ciało kwaternionów. Przykłady

$$q_\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}i - \frac{\sqrt{3}}{3}j, q_\beta = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}k, q_\gamma = 2$$

- $q_\alpha \pm q_\beta, q_\alpha \pm q_\gamma,$
- $q_\alpha q_\beta, q_\beta q_\alpha, q_\alpha q_\gamma, q_\gamma q_\alpha,$
- $q_\alpha^*, q_\beta^*, q_\gamma^*,$
- $\|q_\alpha\|, \|q_\beta\|, q_\gamma\|,$
- $q_\alpha^{-1}, q_\beta^{-1}, q_\gamma^{-1}.$

Włożenie \mathbb{R} i \mathbb{R}^3 w \mathbb{Q}

Zagadnienie Interpolacji

Sterowanie Ruchem

Animacja Orientacji

• Macierz obrotu

• Kąty Eulera

• **Kwaterniony**

• Interpolacja
kwaternionów

Wykorzystanie Ścieżek

- $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{Q}$,
- $\mathbb{R}^3 \hookrightarrow \mathbb{Q} : (v_1, v_2, v_3) \mapsto v_1 i + v_2 j + v_3 k$.
- $q = s + v_1 i + v_2 j + v_3 k = [s|v]$.
 - $[s|v][s'|v'] = [ss' - v \cdot v', sv' + s'v + v \times v']$.

- Macierz obrotu
- Kąty Eulera
- **Kwaterniony**
- Interpolacja kwaternionów

Kwaterniony a obroty

Twierdzenie 1. *Niech $R_{\theta,u}$ będzie obrotem dookoła osi u ($\|u\| = 1$),*

$$q = \cos(\theta/2) + \sin(\theta/2)u_1i + \sin(\theta/2)u_2j + \sin(\theta/2)u_3k.$$

Wtedy $\forall v \in \mathbb{R}^3$

$$Rv = qvq^{-1}$$

Animacja Orientacji. Kwaterniony

- Obrót o kąt θ dookoła osi (u_1, u_2, u_3) .
- $q = (\cos(\theta/2), \sin(\theta/2)u_1, \sin(\theta/2)u_2, \sin(\theta/2)u_3)$
- $q = (q_0, q_1, q_2, q_3), \quad \|q\|^2 = \sum q_i^2 = 1$:
 - $\theta = 2 \arccos q_0,$
 - $u = \frac{1}{\sqrt{1-q_0^2}}(q_1, q_2, q_3) = \frac{1}{\sin \theta/2}(q_1, q_2, q_3),$
 - $q = (\cos(\theta/2), \sin(\theta/2)u_1, \sin(\theta/2)u_2, \sin(\theta/2)u_3)$
- $R_\theta = R_{\theta+360^\circ} \Rightarrow -q \sim q$

Kwaternion a macierz obrotu

Zagadnienie Interpolacji

Sterowanie Ruchem

Animacja Orientacji

• Macierz obrotu

• Kąty Eulera

• **Kwaterniony**

• Interpolacja
kwaternionów

Wykorzystanie Ścieżek

• $q \rightarrow M_R$:

○ $i \mapsto qiq^{-1}, j \mapsto qjq^{-1}, k \mapsto qkq^{-1},$

○
$$M_R = \begin{pmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2q_1q_2 - 2q_3q_0 & 2q_1q_3 + 2q_2q_0 \\ 2q_1q_2 + 2q_3q_0 & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2q_2q_3 - 2q_1q_0 \\ 2q_1q_3 - 2q_2q_0 & 2q_2q_3 + 2q_1q_0 & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{pmatrix}.$$

• $M_R \rightarrow q$:

○
$$\begin{cases} m_{2,1} + m_{1,2} = 4q_1q_2, & m_{1,3} + m_{3,1} = 4q_1q_3, & m_{3,2} + m_{2,3} = 4q_2q_3, \\ m_{2,1} - m_{1,2} = 4q_3q_0, & m_{1,3} - m_{3,1} = 4q_2q_0, & m_{3,2} - m_{2,3} = 4q_1q_0, \end{cases}$$

○
$$\begin{cases} 2m_{0,0} - \text{Tr } M = 4q_0^2 - 1, & 2m_{1,1} - \text{Tr } M = 4q_1^2 - 1, \\ 2m_{2,2} - \text{Tr } M = 4q_2^2 - 1, & 2m_{3,3} - \text{Tr } M = 4q_3^2 - 1. \end{cases}$$

Zagadnienie Interpolacji

Sterowanie Ruchem

Animacja Orientacji

- Macierz obrotu
- Kąty Eulera
- Kwanterniony
- **Interpolacja kwaternionów**

Wykorzystanie Ścieżek

Interpolacja kwaternionów

- Liniowa: $q(u) = (1 - u)q_0 + uq_1$
- Łukowa (slerp): $q(u) = \frac{\sin(1-u)\theta}{\sin \theta} q_1 + \frac{\sin u\theta}{\sin \theta} q_2$
- Interpolacja krzywymi Béziera
 - w algorytmie de Casteljau użyć slerp

Zagadnienie Interpolacji

Sterowanie Ruchem

Animacja Orientacji

Wykorzystanie Ścieżek

- Ruch po ścieżce
- Zorientowanie wzdłuż ścieżki
- Kamera
- Wygładzanie
- Ścieżka na powierzchni

Wykorzystanie Ścieżek

Zagadnienie Interpolacji

Sterowanie Ruchem

Animacja Orientacji

Wykorzystanie Ścieżek

● **Ruch po ścieżce**

● Zorientowanie wzdłuż ścieżki

● Kamera

● Wygładzanie

● Ścieżka na powierzchni

Ruch po ścieżce

- Dany jest tor ruchu obiektu (kamery), sparametryzowany długością łuku oraz funkcja przesunięcia
 - ustalić zmianę położenia oraz zorientowania
 - jeżeli punkty na torze pochodzą z pomiarów, trzeba tor wygładzić
 - dodatkowo ścieżka może leżeć na powierzchni innego obiektu
 - ścieżka bezkolizyjna

Zorientowanie wzdłuż ścieżki

Zagadnienie Interpolacji

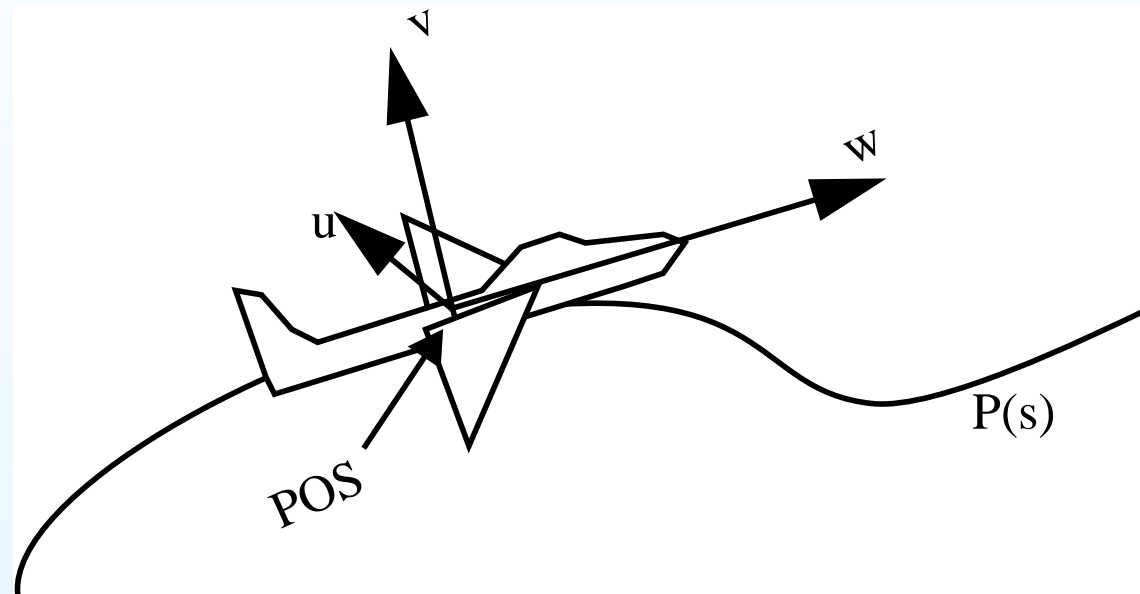
Sterowanie Ruchem

Animacja Orientacji

Wykorzystanie Ścieżek

- Ruch po ścieżce
- **Zorientowanie wzdłuż ścieżki**
- Kamera
- Wygładzanie
- Ścieżka na powierzchni

- Lokalny układ współrzędnych (u, v, w) (prawoskrętny)
- Początek jest na ścieżce $P(s)$



Układ Freneta

Zagadnienie Interpolacji

Sterowanie Ruchem

Animacja Orientacji

Wykorzystanie Ścieżek

- Ruch po ścieżce
- Zorientowanie wzdłuż ścieżki
- Kamera
- Wygładzanie
- Ścieżka na powierzchni

- Jean Frédéric Frenet, 1847

$$w = \frac{P'(s)}{|P'(s)|}$$

$$u = \frac{P''(s) \times P'(s)}{|P''(s) \times P'(s)|}$$

$$v = u \times w$$

Układ Freneta, problemy

Zagadnienie Interpolacji

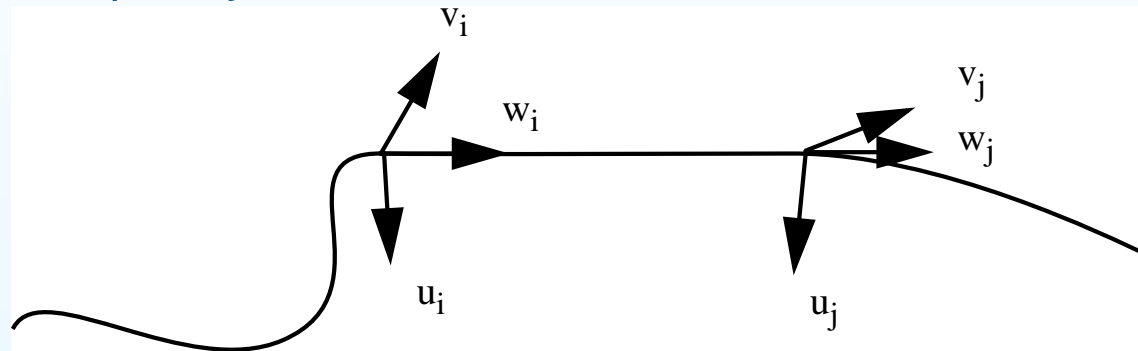
Sterowanie Ruchem

Animacja Orientacji

Wykorzystanie Ścieżek

- Ruch po ścieżce
- Zorientowanie wzdłuż ścieżki
- Kamera
- Wygładzanie
- Ścieżka na powierzchni

- Brak naturalnego kierunku „do góry”
- Punkty spłaszczenia ($P''(s) = 0$)
 - interpolacja na odcinku



- Nieciągłość wektora normalnego (dwa półokręgi)
- Wektor styczny nie określa kierunku, do którego podąża obiekt
- Wektor v (kierunek „do góry”) może gwałtownie się obracać

Zagadnienie Interpolacji

Sterowanie Ruchem

Animacja Orientacji

Wykorzystanie Ścieżek

- Ruch po ścieżce
- Zorientowanie wzdłuż ścieżki
- Kamera
- Wygładzanie
- Ścieżka na powierzchni

Układ Freneta, ważna informacja

- Wektor normalny wskazuje kierunek skrętu
 - można pochylić obiekt w tę stronę
 - bądź w przeciwnym kierunku (siła odśrodkowa)

Zagadnienie Interpolacji

Sterowanie Ruchem

Animacja Orientacji

Wykorzystanie Ścieżek

- Ruch po ścieżce
- Zorientowanie wzdłuż ścieżki

• Kamera

• Wygładzanie

• Ścieżka na powierzchni

Ruch kamery po ścieżce

- Wybrać środek zainteresowania (COI) w ustalonym punkcie sceny (w środku jednego z obiektów)
 - $w = \text{COI} - \text{POS}$
- Niech oś Oy określa kierunek „do góry”
 - $u = w \times y$
 - $v = u \times w$

Zagadnienie Interpolacji

Sterowanie Ruchem

Animacja Orientacji

Wykorzystanie Ścieżek

- Ruch po ścieżce
- Zorientowanie wzdłuż ścieżki
- Kamera
- Wygładzanie
- Ścieżka na powierzchni

Kierunek patrzenia

- Kierunek do COI
 - przechodzenie blisko COI może spowodować gwałtowne zmiany kierunku
- Punkty na krzywej
- Punkty na innej krzywej
- Interpolowane punkty na scenie
- Kierunek „do góry”:
 - w płaszczyźnie w i y
 - odchylony od tego kierunku

Wybór środka zainteresowania

- Punkt na krzywej z wyprzedzeniem $P(s + \Delta s)$
 - wykorzystać parametryzację łukową
 - na końcu ścieżki można użyć interpolacji z wektorem stycznym w końcowym punkcie
 - chwiejąca się kamera
 - uśrednienie kilka punktów krzywej
 - za mało punktów (albo blisko siebie) — efekt pozostaje
 - za dużo punktów — kamera będzie zbyt statyczna
- Wprowadzenie dla COI funkcji $C(s)$
- Można wprowadzić dla kierunku „do góry” funkcję $U(s)$
 $w = C(s) - P(s)$, $u = w \times (U(s) - P(s))$, $v = u \times w$.

Wygładzanie ścieżki

Zagadnienie Interpolacji

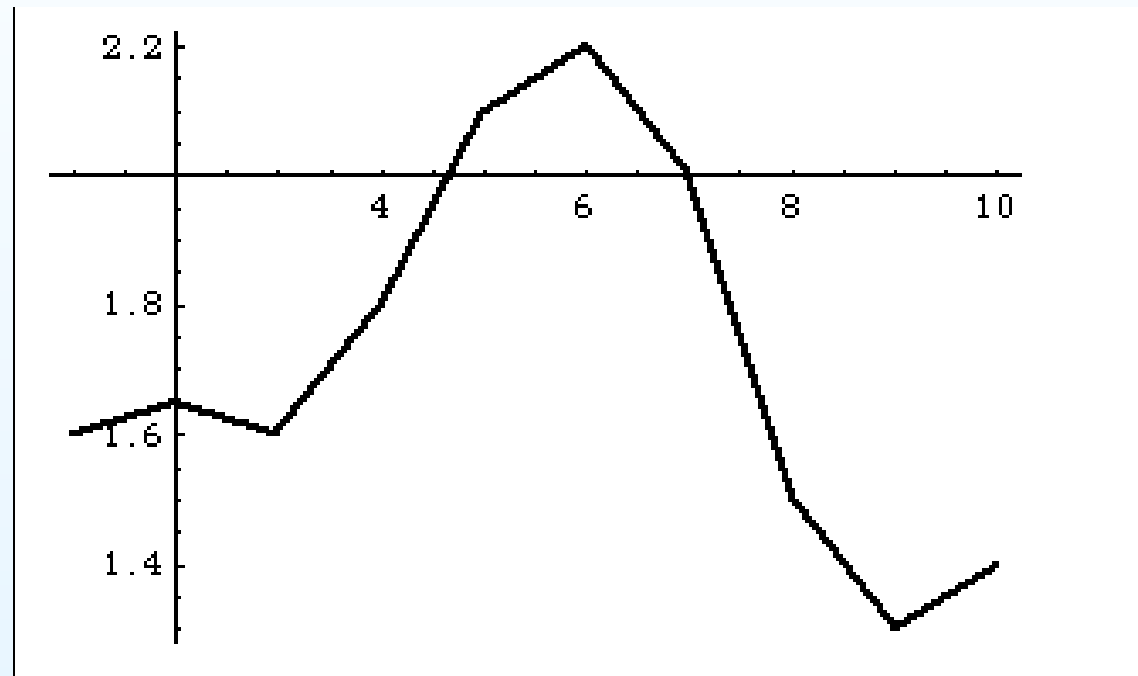
Sterowanie Ruchem

Animacja Orientacji

Wykorzystanie Ścieżek

- Ruch po ścieżce
- Zorientowanie wzdłuż ścieżki
- Kamera
- **Wygładzanie**
- Ścieżka na powierzchni

- Jeżeli kolejne punkty pochodzą z pomiarów, to może być potrzebne wygładzanie



Interpolacja liniowa

Zagadnienie Interpolacji

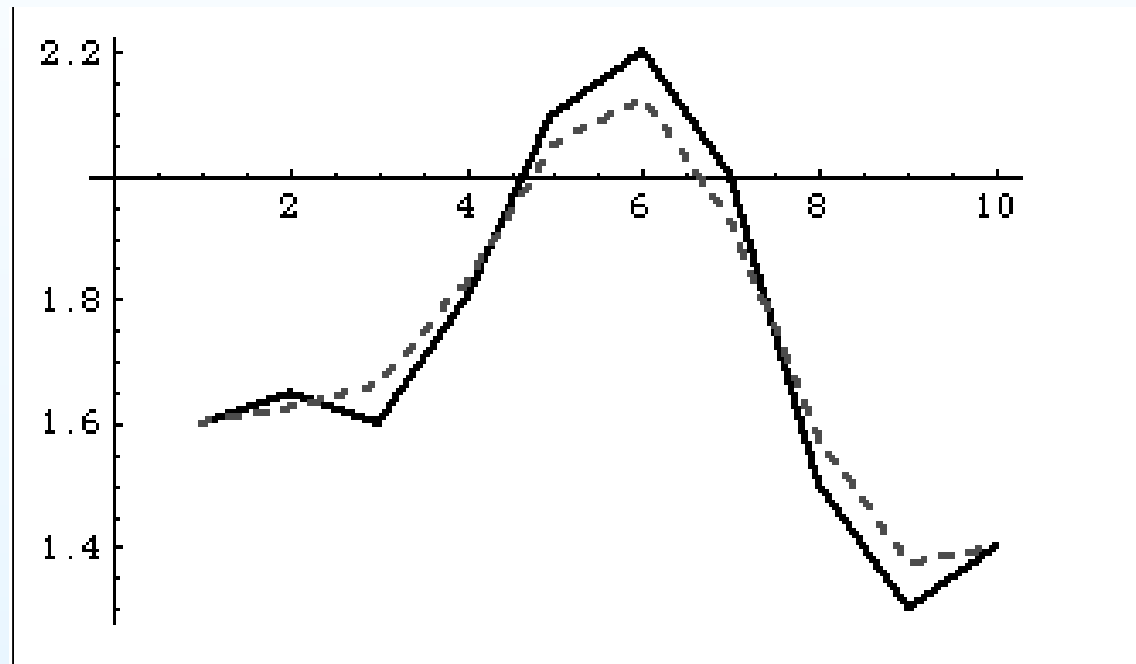
Sterowanie Ruchem

Animacja Orientacji

Wykorzystanie Ścieżek

- Ruch po ścieżce
- Zorientowanie wzdłuż ścieżki
- Kamera
- Wyglądanie
- Ścieżka na powierzchni

$$\bullet \quad p'_i = \frac{1}{2} \left(p_i + \frac{p_{i-1} + p_{i+1}}{2} \right) = \frac{1}{4}p_{i-1} + \frac{1}{2}p_i + \frac{1}{4}p_{i+1}$$



- Ruch po ścieżce
- Zorientowanie wzdłuż ścieżki
- Kamera
- Wyglądanie
- Ścieżka na powierzchni

Interpolacja sześcienna

- $P(u)$ — wielomian stopnia 3, przechodący przez sąsiadujące punkty $P(0) = p_{i-1}$, $P(\frac{1}{4}) = p_i$, $P(\frac{3}{4}) = p_{i+1}$, $P(1) = p_{i+2}$
- $p'_i = \frac{1}{2} \left(P(\frac{1}{2}) + p_1 \right)$
 - układ równań
 - wzór Lanrange'a
 - wzór Newtona
- Na końcach przedziału można użyć paraboli $P(0) = p_0$, $P(\frac{2}{3}) = p_2$, $P(1) = p_3$, $p'_1 = \frac{1}{2} \left(P(\frac{1}{3}) + p_1 \right)$
- Pierwszy punkt bez zmian
 - można użyć krzywej drugiego stopnia: $p'_0 = p_3 + 3(p_1 - p_2)$

Interpolacja sześcienna, przykład

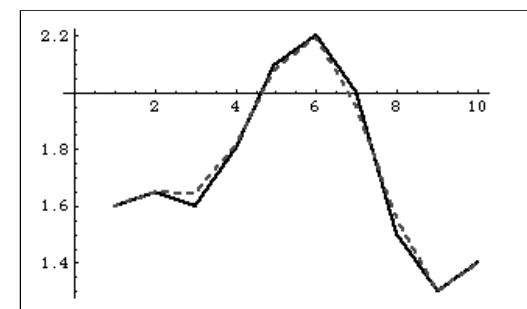
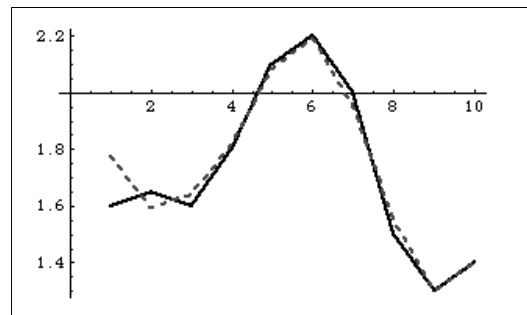
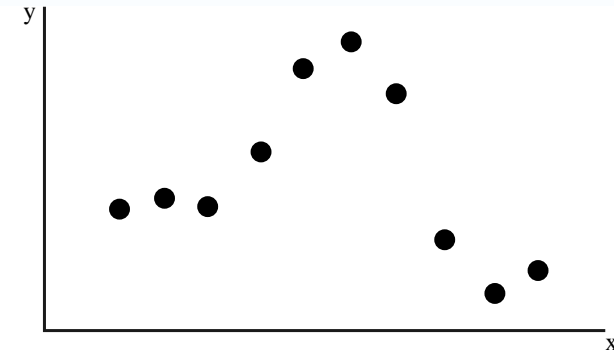
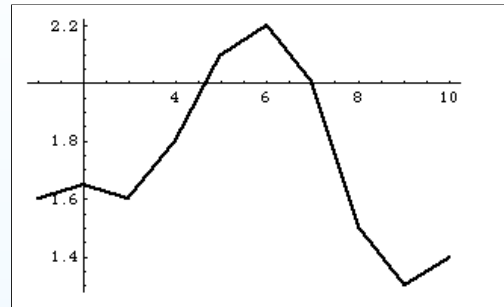
Zagadnienie Interpolacji

Sterowanie Ruchem

Animacja Orientacji

Wykorzystanie Ścieżek

- Ruch po ścieżce
- Zorientowanie wzdłuż ścieżki
- Kamera
- Wyglądanie
- Ścieżka na powierzchni



Zagadnienie Interpolacji

Sterowanie Ruchem

Animacja Orientacji

Wykorzystanie Ścieżek

- Ruch po ścieżce
- Zorientowanie wzdłuż ścieżki
- Kamera
- Wyglądanie
- Ścieżka na powierzchni

Użycie splotu

- $p_i = f(x_i)$
- Splot: $f \star g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+u)g(u) du$
- $g(u)$ — filtr, $\int_{-\infty}^{\infty} g(u) du = 1$
- Całkę można obliczyć numerycznie
- W punktach końcowych funkcję można dowolnie rozszerzyć

Przykłady filtrów

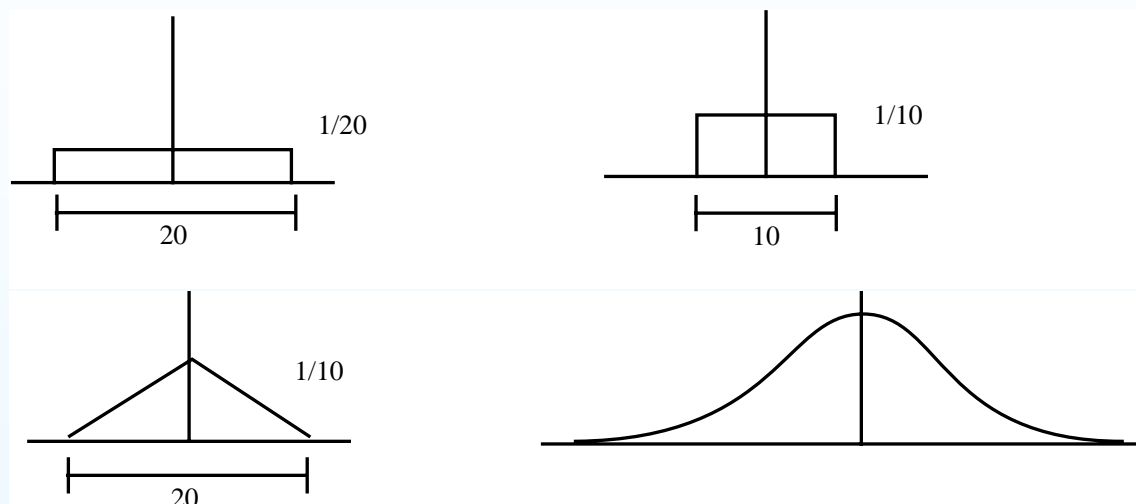
Zagadnienie Interpolacji

Sterowanie Ruchem

Animacja Orientacji

Wykorzystanie Ścieżek

- Ruch po ścieżce
- Zorientowanie wzdłuż ścieżki
- Kamera
- Wygładzanie
- Ścieżka na powierzchni



- prostokątny, dachowy, gaussowski

Splot z filtrem dachowym

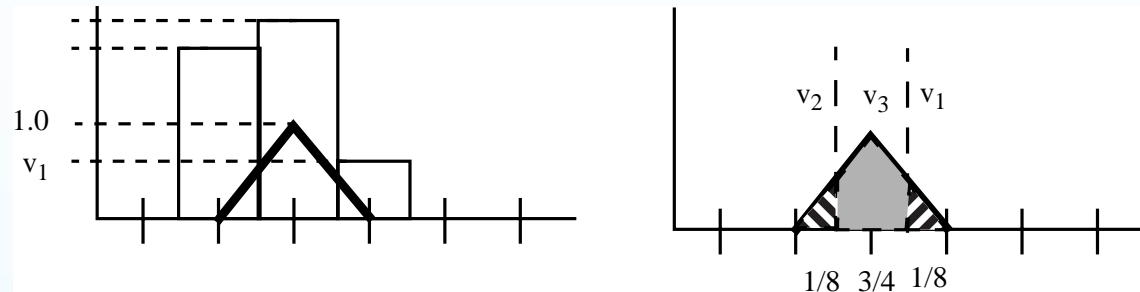
Zagadnienie Interpolacji

Sterowanie Ruchem

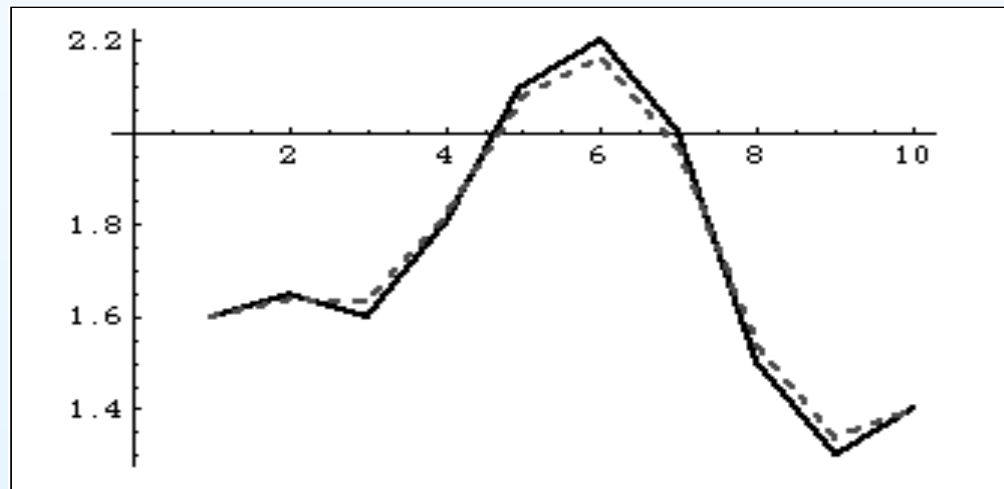
Animacja Orientacji

Wykorzystanie Ścieżek

- Ruch po ścieżce
- Zorientowanie wzdłuż ścieżki
- Kamera
- Wygładzanie
- Ścieżka na powierzchni



- $$v = \frac{1}{8}v_1 + \frac{3}{4}v_2 + \frac{1}{8}v_3$$



Aproksymacja krzywymi B-sklejanymi

Zagadnienie Interpolacji

Sterowanie Ruchem

Animacja Orientacji

Wykorzystanie Ścieżek

- Ruch po ścieżce
- Zorientowanie wzdłuż ścieżki
- Kamera
- Wygładzanie
- Ścieżka na powierzchni

- Można użyć krzywych B-sklejanych
 - wynik – gładka krzywa
 - nie przechodzi przez dane węzły

Wyznaczenie ścieżki na powierzchni

Zagadnienie Interpolacji

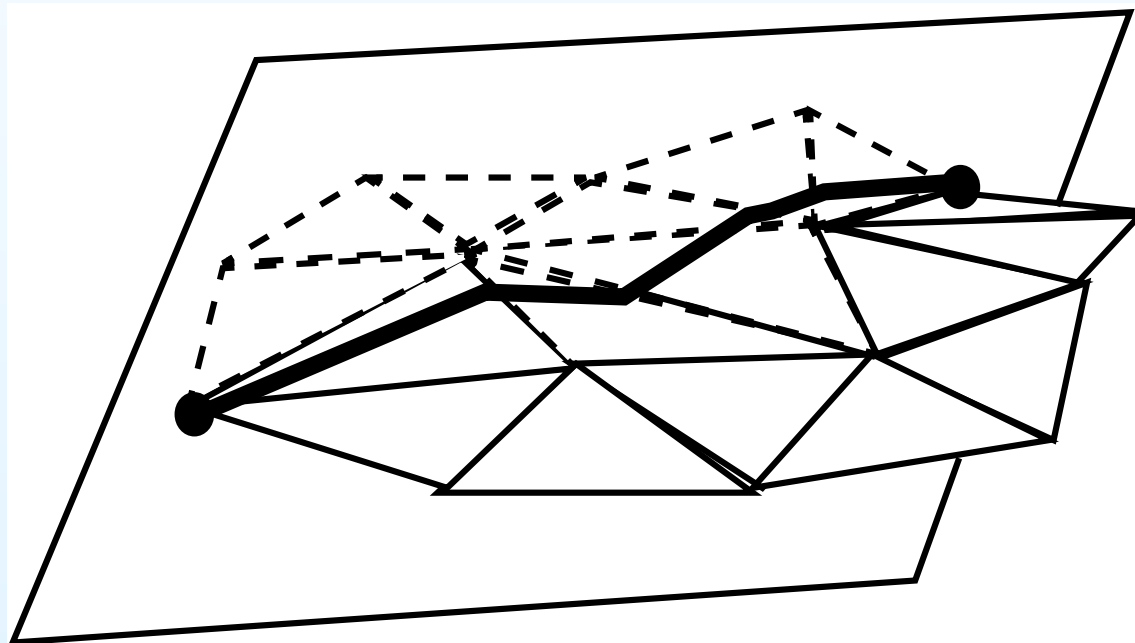
Sterowanie Ruchem

Animacja Orientacji

Wykorzystanie Ścieżek

- Ruch po ścieżce
- Zorientowanie wzdłuż ścieżki
- Kamera
- Wygładzanie
- Ścieżka na powierzchni

- Dane są dwa punkty na powierzchni
- Ścieżka najkrótsza — kosztowne obliczeniowo
- Ścieżka prawie najkrótsza:
 - płaszczyzna łącząca końce ścieżki i możliwie prostopadła do powierzchni



- Ruch po ścieżce
- Zorientowanie wzdłuż ścieżki
- Kamera
- Wygładzanie
- Ścieżka na powierzchni

Wyznaczenie ścieżki na powierzchni

- Powierzchnia parametryzowana $P = P(u, v)$
 - połączyć w dziedzinie (u, v) końce ścieżki odcinkiem (łukiem)
- Skomplikowany mash z trójkątów
 - algorytm zachłanny wyznaczenia ścieżki z krawędzi masha
 - łączymy bieżący punkt z końcem odcinkiem
 - wybieramy krawędź, która ma najmniejszy kąt z odcinkiem
 - obliczamy kosinusy

Ścieżka najszybszego spadku

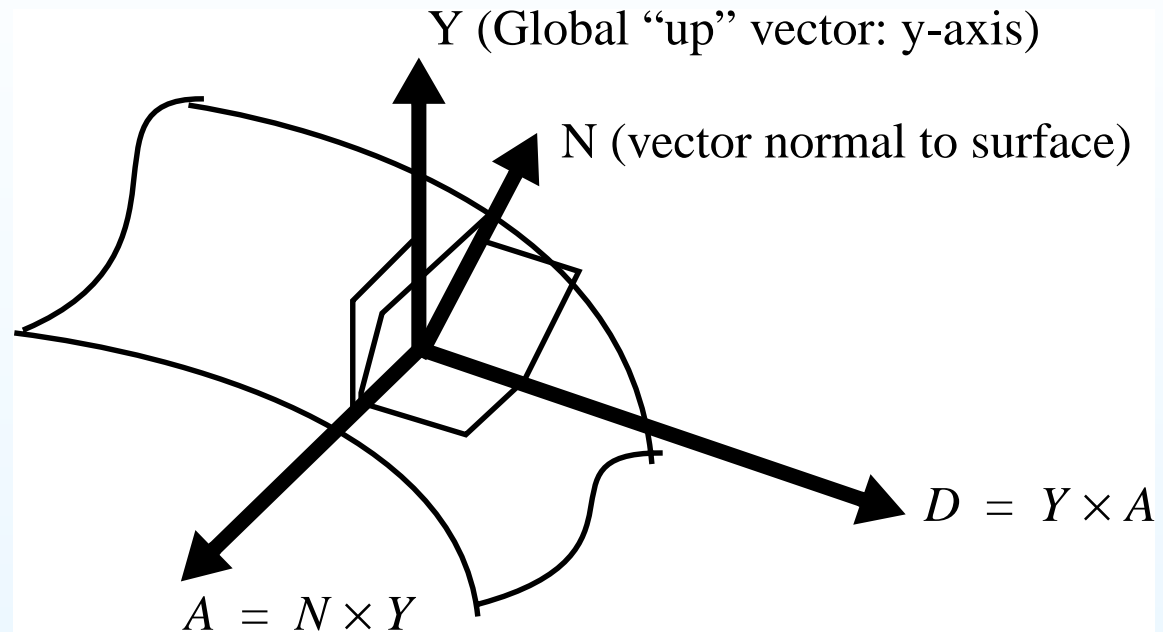
Zagadnienie Interpolacji

Sterowanie Ruchem

Animacja Orientacji

Wykorzystanie Ścieżek

- Ruch po ścieżce
- Zorientowanie wzdłuż ścieżki
- Kamera
- Wygładzanie
- Ścieżka na powierzchni



Zagadnienie Interpolacji

Sterowanie Ruchem

Animacja Orientacji

Wykorzystanie Ścieżek

- Ruch po ścieżce
- Zorientowanie wzdłuż ścieżki
- Kamera
- Wygładzanie
- Ścieżka na powierzchni

Ścieżki bezkolizyjne

- Nieruchome przeszkody (albo rozhome o wiadomych torach)
 - wyznaczenie punktów pośrednich
 - przybliżenie przeszkód prostymi obiektami (sfera, prostopadłościan)
- Ruchome przeszkody
 - poszukiwanie możliwego przedłużenia ścieżki przed przeszkodą (algorytm zachłanny)
 - ruch przeszkod jest przewidywalny