



Modelowanie i wizualizowanie 3W-grafiki

Interpolacja i teksturowanie

Aleksander Denisiuk

`denisjuk@matman.uwm.edu.pl`

Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie

Wydział Matematyki i Informatyki

ul. Słoneczna 54

10-561 Olsztyn

Interpolacja i teksturowanie

Najnowsza wersja tego dokumentu dostępna jest pod adresem <http://wmii.uwm.edu.pl/~denisjuk/uwm>

Techniki teksturowania

- ⑥ Tekstura zawiera informacje o kolorach, które mają zastąpić obliczone kolory powierzchni.
- ⑥ Tekstura zawiera informacje o kolorach, blasku, przezroczystości, które mają zmienić charakterystyki powierzchni po obliczeniach oświetlenia i cieniowania.
- ⑥ Tekstura zawiera parametry, mające wpływ na obliczenie oświetlenia (współczynnik odbicia, przemieszczenie wektora normalnego, etc).

Tekstura



- ⑥ Zdjęcie, obrazek skanowany, utworzony edytorem graficznym.
- ⑥ Obrazek zaprogramowany (skompilowany, generowany na bieżąco).
- ⑥ Obrazek generowany podczas mapowania (odbicie).

Teksturowanie

$$[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \text{model}$$

Interpolacja tekstury

1. Określa się lokalne współrzędne tekstury w wierzchołkach poligonu
2. Interpoluje się wewnątrz: interpolacja barycentryczna, biliniowa

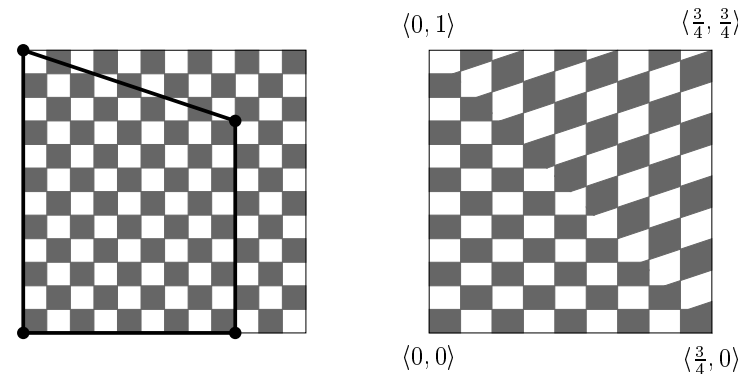


Figure V.1: The square on the left is a texture map. The square on the right is filled with a quadrilateral region of this texture map. The coordinates labeling the corners of the square are s, t values indexing into the texture map. The subregion of the checkerboard texture map selected by the s and t coordinates is shown in the left square. This subregion of the texture map was converted to two triangles first, and each triangle was mapped by linear interpolation into the corresponding triangle in the square on the right: this caused the visible diagonal boundary between the triangles.

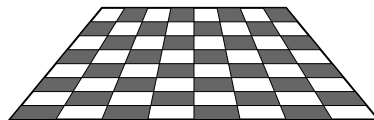
Interpolacja hyperboliczna



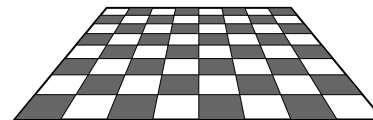
$$(x_i : w_i) \leftrightarrow y_i = x_i/w_i$$

$$z = \sum \alpha_i y_i$$

$$\sum \beta_i (x_i : w_i), \quad \beta_i = \frac{\alpha_i/w_i}{\sum \alpha_j/w_j}$$



Without hyperbolic interpolation



With hyperbolic interpolation

Figure V.2: The figure on the right uses hyperbolic interpolation to render the correct perspective foreshortening. The figure on the left does not.

Wybór lokalnych współrzędnych dla tekstury



- ⑥ Płaszczyzna.
- ⑥ Sześcian.
- ⑥ Powierzchnia parametryzowana

$$P(u, v).$$

Współrzędne na teksturze zależą od u i v . (Może być również od $p(u, v)$, wektoru normalnego do powierzchni, etc.)

Przykład 1 (Walec. Mapowanie cylindryczne).

$$p(\theta, y) = (r \sin \theta, y, r \cos \theta), \quad 0 \leq \theta < 360, -h/2 \leq y \leq h/2$$

$$s = \frac{\theta}{360}, \quad t = \frac{y + h/2}{h}$$

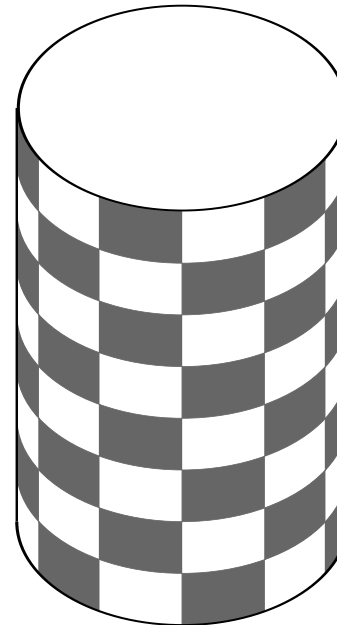
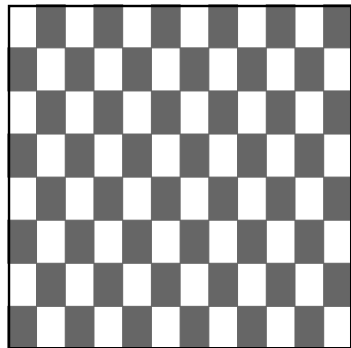


Figure V.3: A texture map and its application to a cylinder.

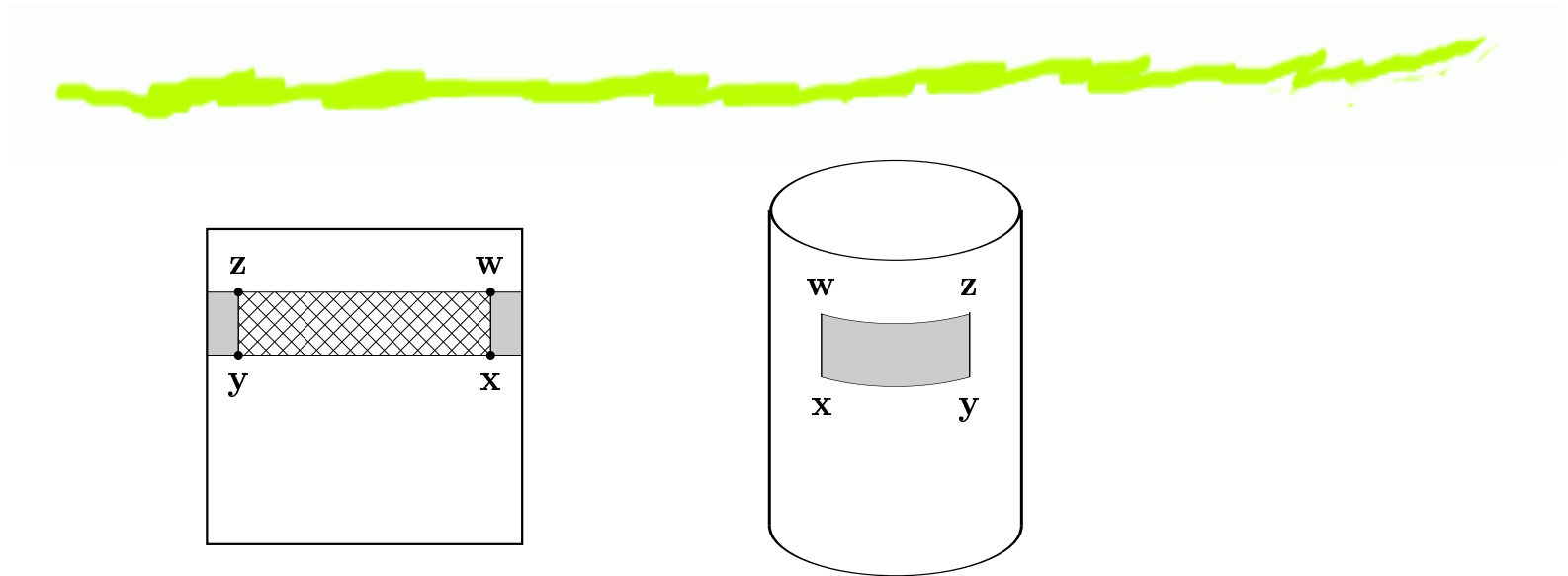


Figure V.4: The quadrilateral x , y , z , w selects a region of the texture map. The crosshatched region of the texture map is *not* the intended region of the texture map. The shaded area is the intended region.

Sfera. Mapowanie sferyczne



$$P(\theta, \varphi) = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta)$$

$$\textcircled{6} \quad s = \frac{\theta}{360}, \quad t = \frac{\varphi}{180} + \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{6} \quad s = \frac{\theta}{360}, \quad t = \frac{\sin \varphi}{2} + \frac{1}{2}$$

Mapowanie sferyczne

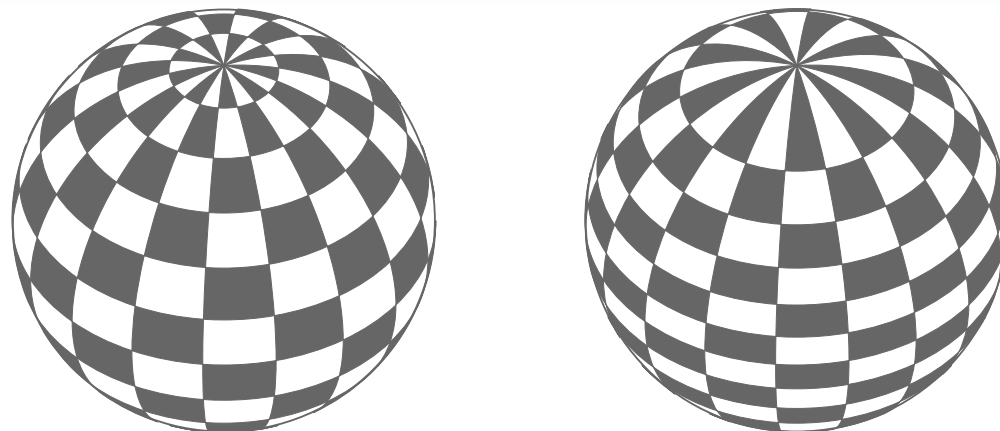


Figure V.5: Two applications of a texture map to a sphere. The sphere on the left has a checkerboard texture applied with texture coordinates given by the spherical map of equation (V.2). The sphere on the right uses texture coordinates given by the cylindrical projection of equation (V.3). The spheres are drawn with a tilt and a small rotation.

Torus



$$P(\theta, \varphi) = ((R + r \cos \varphi) \sin \theta, r \sin \varphi, (R + r \cos \varphi) \cos \theta)$$

$$s = \frac{\theta}{360}, \quad t = \frac{\varphi}{360}$$

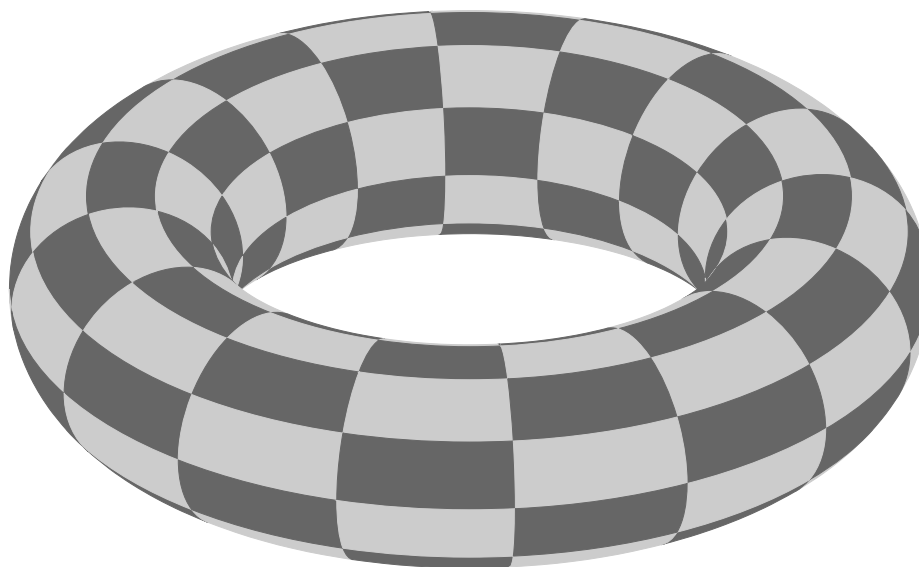


Figure V.6: A checkerboard texture map applied to a torus.

Aliasing



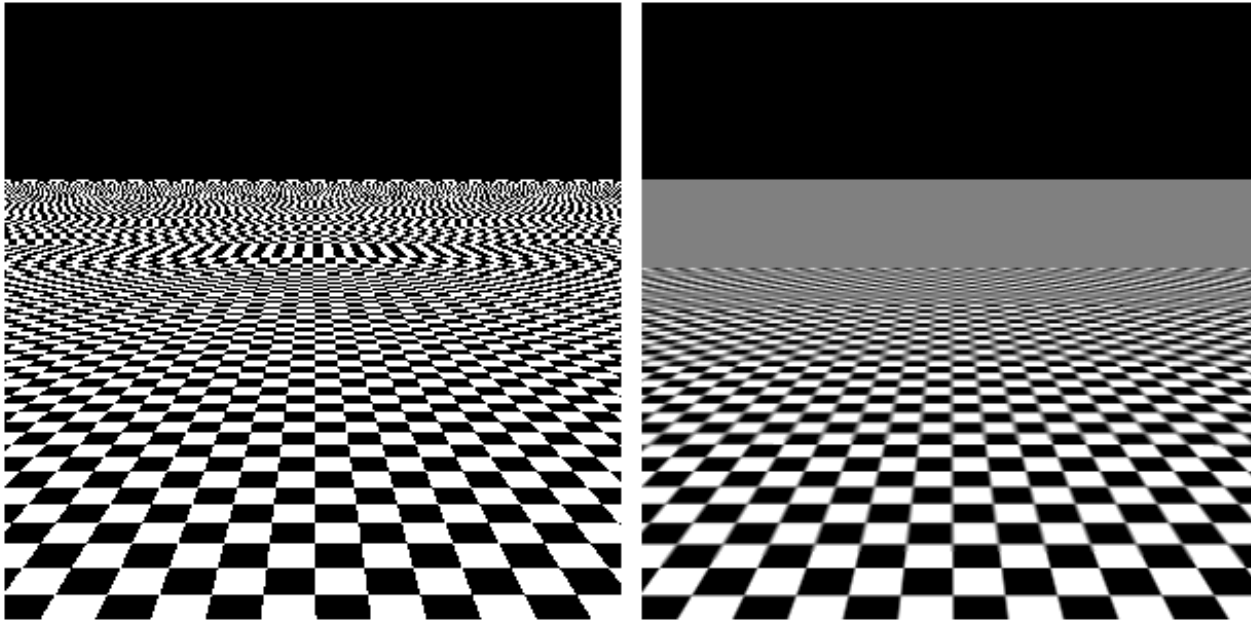
- ⑥ Rozdzielczość tekstury jest mniejsza od rozdzielczości ekranu
- ⑥ Rozdzielczość tekstury jest większa od rozdzielczości ekranu
 - △ Miganie, interferencja, plamy
 - △ Obiekty ruszające się

Antyaliasing



- ⑥ Interpolacja
- ⑥ Mipmapping
 - △ Zastosowanie skalowanych tekstur
 - △ Interpolacja najbliższych tekstur
 - △ Zwiększenie prędkości
 - △ Zwiększenie pamięci o 33%
 - △ Jest implementowany sprzętowo

Mipmapping



Supersampling (*nadpróbkowanie*)

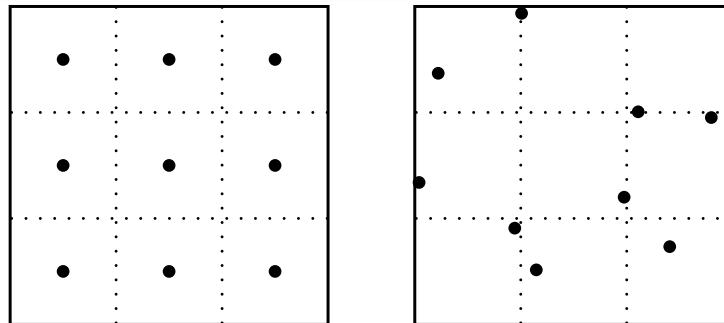
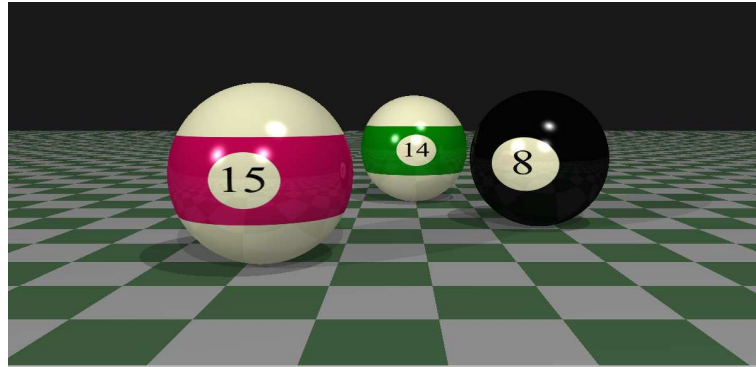


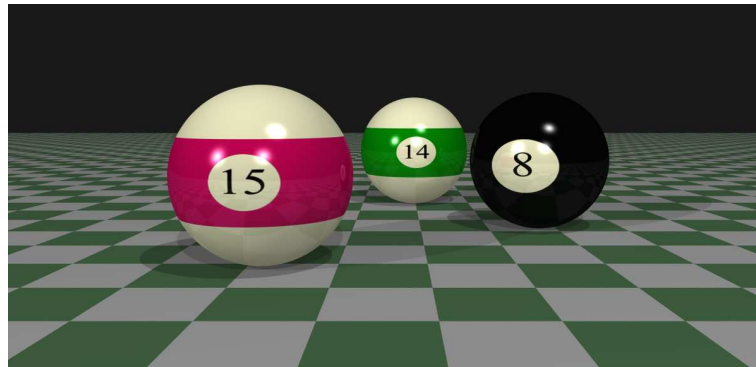
Figure V.7: In the first figure, the nine supersample points are placed at the centers of the nine subpixels. In the second figure, the supersample points are jittered, but are constrained to stay inside their subpixel.

- ⑥ Zwykły
- ⑥ Stochastyczny
- ⑥ Jittering (fluktuacje)

Supersampling



(a) No supersampling.



(b) Supersampling with jittered subpixel centers.

Figure IX.9: An example of anti-aliasing using jittered subpixel centers. (a) shows the scene rendered without supersampling; note the “jaggies” on the silhouettes of the balls, for instance. (b) is the scene with pixels selectively supersampled up to a maximum of 40 times. See color plate C.9.

Mapowanie wypukłości



Figure V.8: A bump mapped torus. Note the lack of bumps on the silhouette. There are four white lights shining on the scene, plus a low level of ambient illumination. This picture was generated with the ray tracing software described in appendix B. See color plate C.6.

- ⑥ Zmiana wektora normalnego
- ⑥ Przed obliczeniem oświetlenia
- ⑥ Cieniowanie Phong (nie Gourauda)

Mapowanie środowiska



- ⑥ Dany jest mały zwierciadlany obiekt (kula, sześcian).
- ⑥ Oblicza się (robi się zdjęcie) mapa tekstury jako obraz otoczenia widoczny od środka obiektu

Projekcja sferyczna



Figure V.10: An environment map mapped into a sphere projection. This is the kind of environment map supported by OpenGL. See color plate C.7.

The scene is the same as is shown in figure V.11. Note that the front wall has the most fidelity, and the back wall the least. For this reason, spherical environment maps are best used when the view direction is close to the direction used to create the environment map.

Projekcja sześciianowa

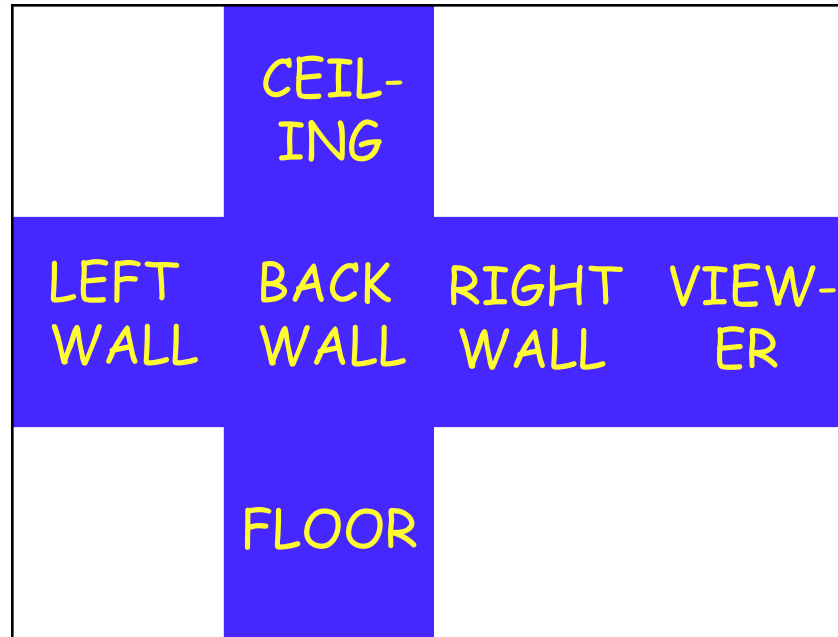


Figure V.11: An environment map mapped into a box projection consists of the six views from a point, mapped to the faces of a cube and then unfolded to make a flat image. This scene shows the reflection map from the point at the center of a room. The room is solid blue, except for yellow writing on the walls, ceiling and floor. The rectangular white regions of the environment map are not used. See color plate C.8.

Interpolacja liniowa



$$x(\alpha) = (1 - \alpha)x_1 + \alpha x_2$$

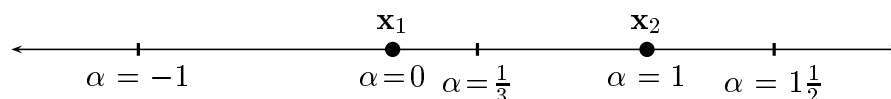


Figure IV.1: Interpolated and extrapolated points for various values of α . For $\alpha < 0$, $\mathbf{x}(\alpha)$ is to the left of $\mathbf{x}_1$. For $\alpha > 1$, $\mathbf{x}(\alpha)$ is to the right of $\mathbf{x}_2$. For $0 < \alpha < 1$, $\mathbf{x}(\alpha)$ is between $\mathbf{x}_1$ and $\mathbf{x}_2$.

$$u - x_1 = \alpha(x_2 - x_1)$$
$$\alpha = \frac{(u - x_1) \cdot (x_2 - x_1)}{(x_2 - x_1)^2}$$

$$f(x(\alpha)) = (1 - \alpha)f(x_1) + \alpha f(x_2)$$

Średnie ważone

Definicja 2. Niech $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^3$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \tag{1}$$

nazywa się *kombinacją liniową*. Jeżeli $\sum \alpha_i = 1$, to (1) nazywa się *kombinacją afiniczną*. Jeżeli ponadto wszystkie $\alpha_i \in [0, 1]$, to (1) nazywa się *kombinacją wypukłą (średnią ważoną)*.

Średnie ważone

Twierdzenie 3. *Przekształcenie afiniczne A zachowuje kombinacje afiniczne.*

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n \mapsto \alpha_1 A(x_1) + \cdots + \alpha_n A(x_n)$$

Dowód. $A(x) = B(x) + A(0)$. A więc

$$\begin{aligned} A(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n) &= \alpha_1 B(x_1) + \cdots + \alpha_n B(x_n) + A(0) = \\ &= \alpha_1 B(x_1) + \cdots + \alpha_n B(x_n) + (\alpha_1 + \alpha_n) A(0) = \\ &= \alpha_1 B(x_1) + \alpha_1 A(0) + \cdots + \alpha_n B(x_n) + \alpha_n A(0) = \\ &= \alpha_1 A(x_1) + \cdots + \alpha_n A(x_n) \end{aligned}$$



Współrzędne barycentryczne

Twierdzenie 4. *Niech dane będą trzy niekolinearne punkty $x, y, z \in \mathbb{R}^3$, formujące trójkąt T należący do płaszczyzny P . Wtedy*

- 1. $\forall u \in T \exists \alpha, \beta, \gamma \in [0, 1]$, takie że $u = \alpha x + \beta y + \gamma z$, $\alpha + \beta + \gamma = 1$ (kombinacja wypukła),*
- 2. $\forall u \in P \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, takie że $u = \alpha x + \beta y + \gamma z$, $\alpha + \beta + \gamma = 1$ (kombinacja afiniczna).*

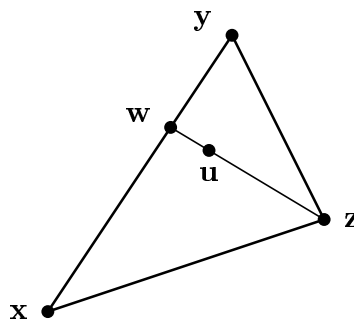


Figure IV.2: The point u in the interior of the triangle is on the line segment from w to z . The point w is a weighted average of x and y . The point u is a weighted average of w and z .

Współrzędne barycentryczne

Twierdzenie 5. Współczynniki α, β, γ z twierdzenia 4 określone są jednoznacznie.

Definicja 6. Współczynniki α, β, γ z twierdzenia 4 nazywają się barycentrycznymi współrzędnymi punktu u .

Przykład 7. $x = (0, 0), y = (2, 3), z = (3, 1),$

⑥ $\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = 0,$

⑥ $\alpha = \frac{2}{3}, \beta = \frac{1}{3}, \gamma = 0,$

⑥ $\alpha = \frac{4}{3}, \beta = \frac{2}{3}, \gamma = -1.$

Interpolacja po trzech punktach

$$u = \alpha x + \beta y + \gamma z, \quad \alpha + \beta + \gamma = 1$$

$$f(u) = \alpha f(x) + \beta f(y) + \gamma f(z)$$

Współrzędne barycentryczne a pole

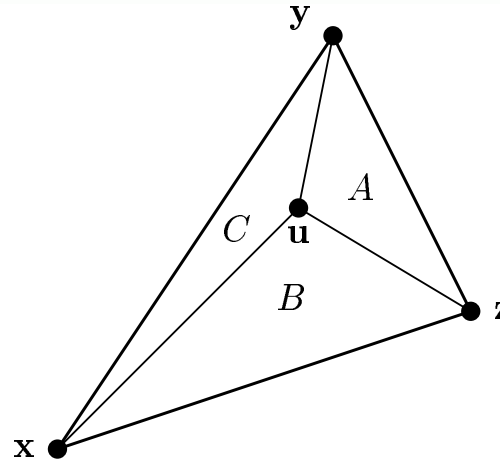


Figure IV.3: The barycentric coordinates α , β and γ for the point $\mathbf{u}$ are proportional to the areas A , B and C .

Twierdzenie 8. *Współrzędne barycentryczne oblicza się przez pola trójkątów według wzoru:*

$$\alpha = \frac{A}{A + B + C}, \quad \beta = \frac{B}{A + B + C}, \quad \gamma = \frac{C}{A + B + C}.$$

Dowód twierdzenia 8

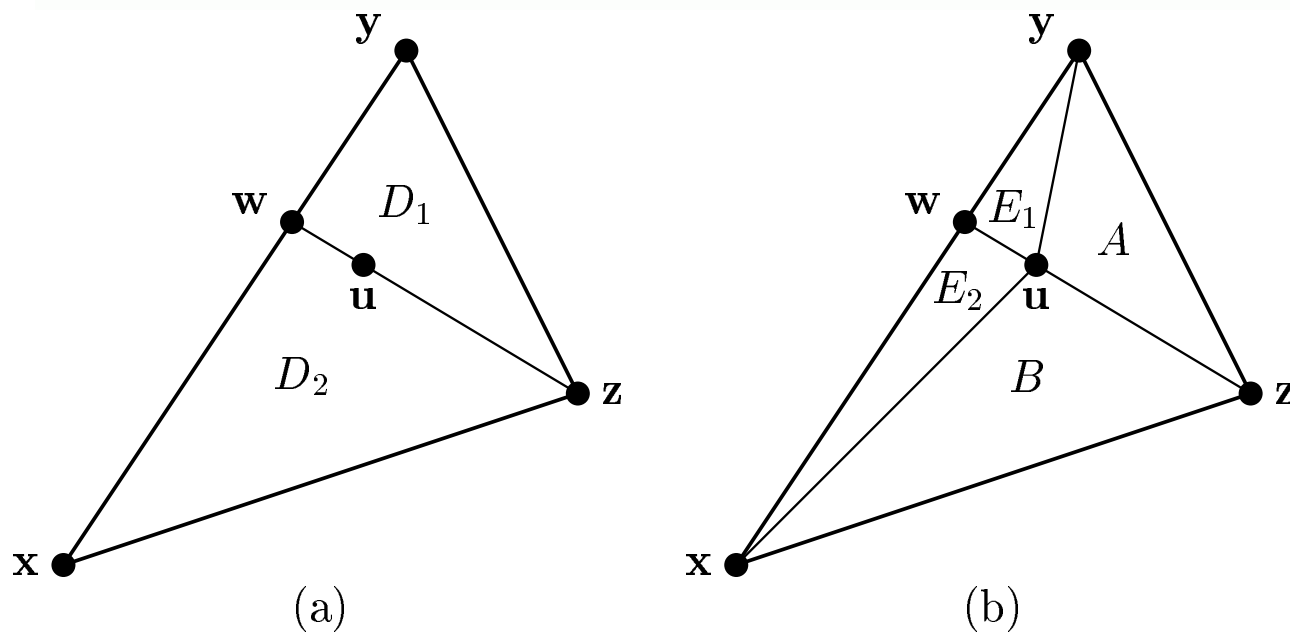


Figure IV.4: The areas used in the proof of Theorem IV.4.

Obliczenie barycentrycznych współrzędnych w $\mathbb{R}^2$

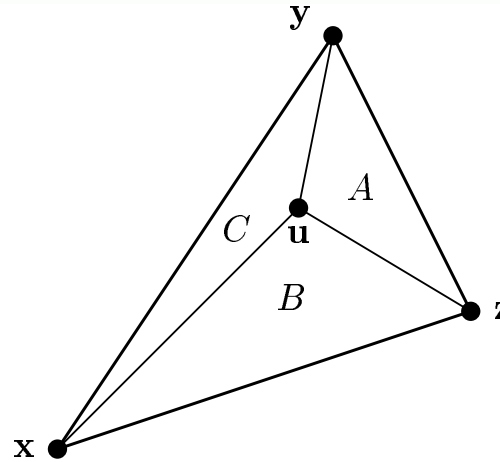


Figure IV.3: The barycentric coordinates α , β and γ for the point $\mathbf{u}$ are proportional to the areas A , B and C .

$$\beta = \frac{(z - x) \times (u - x)}{(z - x) \times (y - x)}, \quad \gamma = \frac{(u - x) \times (y - x)}{(z - x) \times (y - x)},$$
$$\alpha = 1 - \beta - \gamma.$$

Obliczenie barycentrycznych współrzędnych w $\mathbb{R}^3$

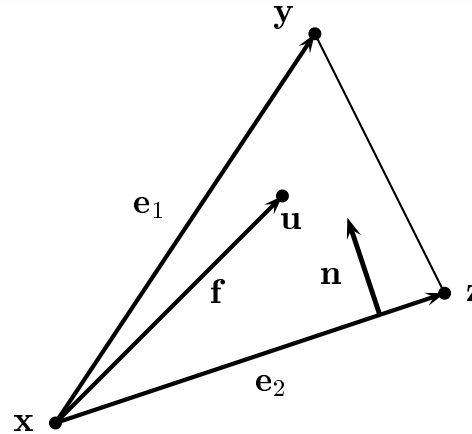


Figure IV.5: Calculating barycentric coordinates in $\mathbb{R}^3$.

$$m = e_1 - (e_1 \cdot e_2)e_2/e_2^2, \quad n = m/\|m\|$$

$$D = \frac{1}{2}(n \cdot e_1)\|e_2\| = \frac{(m \cdot e_1)\|e_2\|}{2\|m\|}$$

$$B = \frac{1}{2}(n \cdot f)\|e_2\| = \frac{(m \cdot f)\|e_2\|}{2\|m\|}$$

Obliczenie barycentrycznych współrzędnych w $\mathbb{R}^3$

$$\beta = \frac{B}{D} = \frac{m \cdot f}{m \cdot e_1} = \frac{(e_2^2 e_1 - (e_1 \cdot e_2) e_2) \cdot f}{e_1^2 e_2^2 - (e_1 \cdot e_2)^2}$$
$$u_\beta = \frac{e_2^2 e_1 - (e_1 \cdot e_2) e_2}{e_1^2 e_2^2 - (e_1 \cdot e_2)^2} \quad u_\gamma = \frac{e_1^2 e_2 - (e_1 \cdot e_2) e_1}{e_1^2 e_2^2 - (e_1 \cdot e_2)^2}$$
$$\beta = u_\beta \cdot f, \quad \gamma = u_\gamma \cdot f, \quad \alpha = 1 - \beta - \gamma$$

Obliczenie barycentrycznych współrzędnych

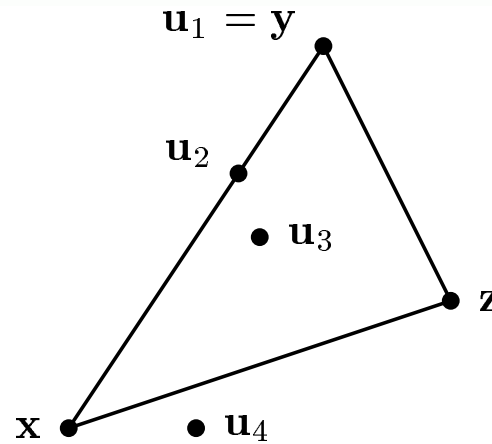


Figure IV.6: The points from exercise IV.5.

Przykład 9. $x = (0, 0)$, $y = (2, 3)$, $z = (3, 1)$.

⑥ $u = (2, 3),$

⑥ $u = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right),$

⑥ $u = \left(1\frac{1}{3}, 2\right),$

⑥ $u = (1, 0).$

Interpolacja biliniowa (dwuliniowa)

$$\begin{aligned} u &= (1 - \beta)((1 - \alpha)x + \alpha y) + \beta((1 - \alpha)w + \alpha z) = \\ &= (1 - \alpha)((1 - \beta)x + \beta w) + \alpha((1 - \beta)y + \beta z) = \\ &= (1 - \alpha)(1 - \beta)x + \alpha(1 - \beta)y + \alpha\beta z + (1 - \alpha)\beta w \end{aligned}$$

$$f = (1 - \alpha)(1 - \beta)f(x) + \alpha(1 - \beta)f(y) + \alpha\beta f(z) + (1 - \alpha)\beta f(w)$$

Interpolacja biliniowa

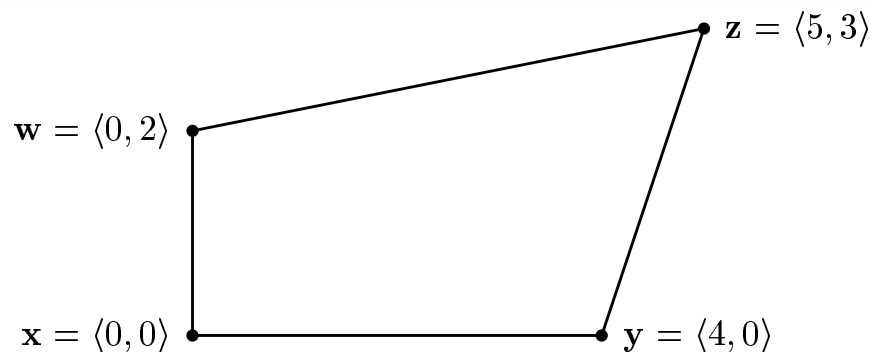


Figure IV.8: Figure for exercise IV.7.

Przykład 10. $x = (0, 0)$, $y = (4, 0)$, $z = (5, 3)$, $w = (0, 2)$

⑥ $\alpha = 1, \beta = 0$

⑥ $\alpha = \frac{1}{3}, \beta = 1$

⑥ $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{4}$

⑥ $\alpha = \frac{2}{3}, \beta = \frac{1}{3}$

Interpolacja biliniowa

Twierdzenie 11. *Niech x, y, z i w tworzą płaski, wypukły czworokąt. Wtedy odwzorowanie interpolacji biliniowej*

$$\begin{aligned} [0, 1]^2 &\rightarrow xyzw, \\ (\alpha, \beta) &\mapsto u(\alpha, \beta) \end{aligned}$$

jest wzajemnie-jednoznaczny

Wniosek 12. *Niech punkty x, y, z i w będą niekomplanarne. Wtedy odwzorowanie*

$$(\alpha, \beta) \mapsto u(\alpha, \beta)$$

jest wzajemnie-jednoznaczny.

Interpolacja biliniowa

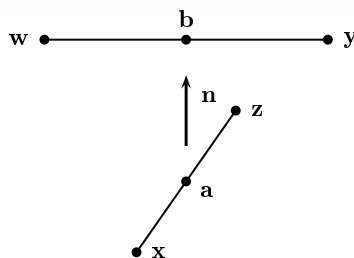


Figure IV.10: The line segments $\overline{xz}$ and $\overline{yw}$ have midpoints $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$. The vector $\mathbf{n}$ is the unit vector in the direction from $\mathbf{a}$ to $\mathbf{b}$.

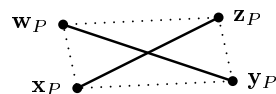


Figure IV.11: The projections of the two diagonals onto the plane P are non-collinear and intersect at their midpoints, at the common projection of $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$. The four projected vertices form a convex quadrilateral.

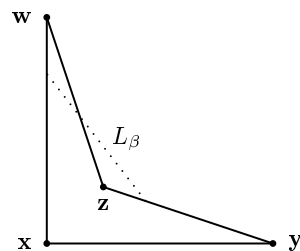


Figure IV.13: An example of the failure of Theorem IV.6 for non-convex, planar quadrilaterals.

Odwrócenie na płaszczyźnie

$$A = (w - u) \times (z - y)$$

$$B = (z - y) \times (u - x) - (w - x) \times (u - y)$$

$$C = (u - x) \times (u - y)$$

if $B > 0$ **then**

$$\beta = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

else

$$\beta = \frac{2C}{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}} 2A$$

end if

$$s_{1,\beta} = (1 - \beta)x + \beta w$$

$$s_{2,\beta} = (1 - \beta)y + \beta z$$

$$\alpha = \frac{(u - s_{1,\beta}) \cdot (s_{2,\beta} - s_{1,\beta})}{(s_{2,\beta} - s_{1,\beta})^2}$$

Odwrócenie na płaszczyźnie

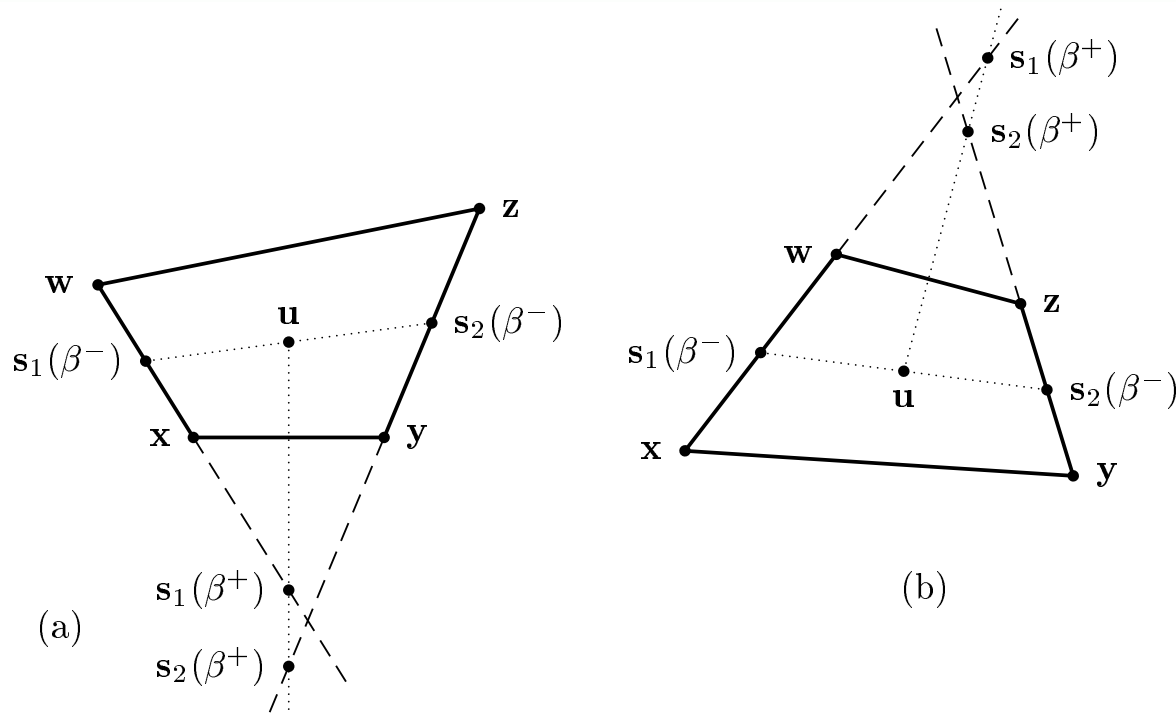


Figure IV.15: The two possibilities for the sign of $\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2$. In (a), $\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2 < 0$; in (b), $\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2 > 0$. In each case, there are two values for β where the points $\mathbf{s}_1(\beta)$, $\mathbf{s}_2(\beta)$, and $\mathbf{u}$ are collinear. The values β^+ and β^- are the solutions to equation (IV.22) obtained with the indicated choice of plus/minus sign. For both (a) and (b), $\beta = \beta^-$ is between 0 and 1 and is the desired root.

Interpolacja trójliniowa

Dane są osiem punktów $x_{i,j,k} \in \mathbb{R}^3$, $i, j, k = 0, 1$.

$$u(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{i,j,k} w_i(\alpha)w_j(\beta)w_k(\gamma)x_{i,j,k},$$

gdzie

$$w_n(\delta) = \begin{cases} 1 - \delta, & n = 0 \\ \delta & n = 1 \end{cases}$$

$$f(u(\alpha, \beta, \gamma)) = \sum_{i,j,k} w_i(\alpha)w_j(\beta)w_k(\gamma)f(x_{i,j,k})$$

Zbiory wypukłe

Definicja 13. Zbiór $A \subset \mathbb{R}^n$ nazywa się *wypukłym*, jeżeli dowolny odcinek, którego końce należą do tego zbioru, w całości się w nim zawiera.

- ⑥ odcinek
- ⑥ prosta linia, promień
- ⑥ płaszczyzna, półpłaszczyzna
- ⑥ podprzestrzeń liniowa, afiniczna
- ⑥ koło, kula
- ⑥ trójkąt, równoległobok
- ⑥ etc.

Otoczka wypukła

Definicja 14. *Otoczka wypukła (powłoka wypukła, uwypuklenie)* zbioru $A \subset \mathbb{R}^n$ jest to najmniejszy (w sensie inkluzji) zbiór wypukły zawierający A . Otoczkę wypukłą A oznacza się zwykle jako: $\text{conv } A$.

- ⑥ Powłoką wypukłą zbioru wypukłego jest ten sam zbiór
- ⑥ Powłoka wypukła zbioru punktów płaszczyzny $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$, gdzie $n > 2$ jest wielokątem (wielobokiem) wypukłym o wierzchołkach należących do zbioru $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$.
- ⑥ Powłoką wypukłą zbioru trzech punktów niewspółliniowych jest trójkąt o wierzchołkach w tych punktach.
- ⑥ Otoczką wypukłą zbioru $\{A, B\}$ jest odcinek AB .

Otoczka wypukła

Twierdzenie 15. *Otoczkę wypukłą zgadza się ze zbiorem wszystkich kombinacji wypukłych elementów zbioru A :*

$$\text{conv } A = \left\{ x \mid x = \sum_{i=1}^n \beta_i a_i, a_i \in A, \beta_i \in [0, 1], \sum_{i=1}^n \beta_i = 1, \right\}$$

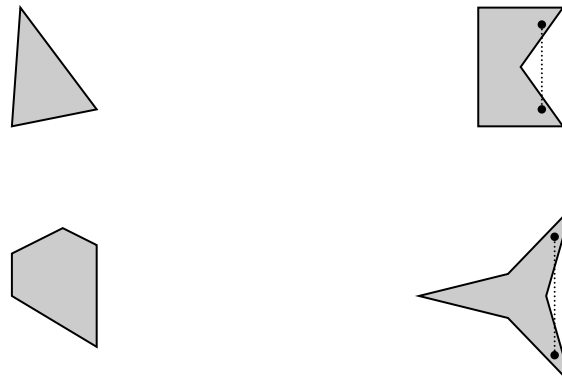


Figure IV.17: The shaded regions represent sets. The two sets on the left are convex, and the two sets on the right are not convex. The dotted lines show line segments with endpoints in the set which are not entirely contained in the set.

Wypukłe kombinacje współrzędnych jednorodnych

$$x_0 = (0 : 0 : 0 : 1), x_1 = (1 : 0 : 0 : 1), x'_1 = (2 : 0 : 0 : 2).$$

$$\frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}x_1 = \left(\frac{1}{2} : 0 : 0 : 1\right) \quad \frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}x'_1 = \left(1 : 0 : 0 : \frac{3}{2}\right)$$

$$w_i > 0$$

$$\begin{aligned} \alpha_1(w_1x_1 : w_1) + \cdots + \alpha_k(w_kx_k : w_k) &= \\ &= \left(\frac{\alpha_1w_1x_1 + \cdots + \alpha_kw_kx_k}{\sum \alpha_iw_i} : 1 \right) \end{aligned}$$

Wypukłe kombinacje współrzędnych jednorodnych

Twierdzenie 16. *Niech dany będzie zbiór $A \subset \mathbb{R}^n$. Wtedy kombinacje wypukłe jednorodnych współrzędnych punktów A ($w_i > 0$) będą tworzyć jednorodne współrzędne $\text{conv } A$.*