Modelowanie i Wizualizowanie 3W grafiki. Geometria 3W

Aleksander Denisiuk
Uniwersytet Warmińsko-Mazurski
Olsztyn, ul. Słoneczna 54
denisjuk@matman.uwm.edu.pl

Geometria 3W

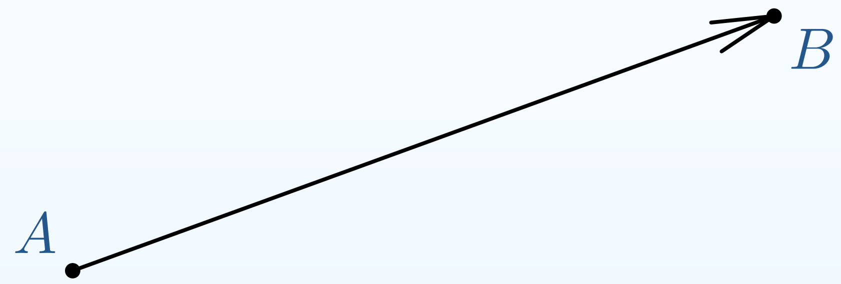
Najnowsza wersja tego dokumentu dostępna jest pod adresem

`http://wmii.uwm.edu.pl/~denisjuk/uwm`

Przestrzeń liniowa $\mathbb{R}^3$

Definicja wektora

- *Wektorem* nazywa się skierowany odcinek.



- Kierunek wektora pokazuje strzałka.
- Punkt A jest *początkiem* wektora
- Punkt B jest *końcem* wektora
- Oznaczenie: $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$

Równość wektorów

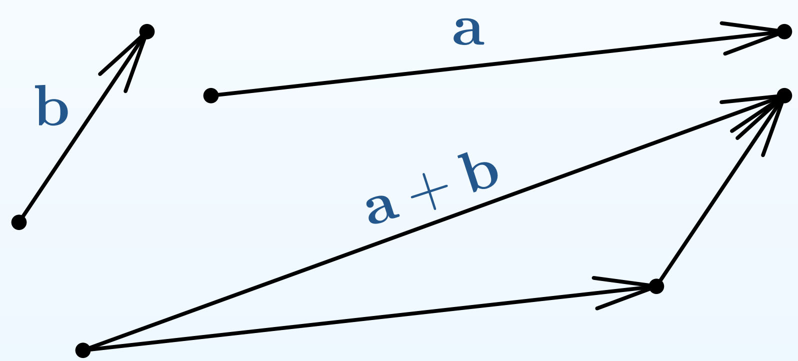
- Dwa wektory są *równe,* jeżeli jeden z nich może zostać otrzymany z drugiego poprzez przesunięcie równoległe.
- Relcja równości wektorów jest *relacją równoważności:*
  - $\mathbf{a} = \mathbf{a}$ (symetryczna)
  - $\mathbf{a} = \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{a}$ (zwrotna)
  - $\mathbf{a} = \mathbf{b}, \mathbf{b} = \mathbf{c} \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{c}$ (przechodnia)

Wektory, cd

- Dwa wektory są *zgodnie kolinearne,* jeżeli są równoległe i mają ten sam zwrot.
- Dwa wektory są *niezgodnie kolinearne,* jeżeli są równoległe i mają przeciwne zwroty.
- Długość odcinka AB, przedstawiającego wektor $\mathbf{a}$, nazywa się jego *długością* $|AB| = |\mathbf{a}| = \|\mathbf{a}\|$
- wektor nazywa się *zerowym,* jeśli jego początek i koniec się pokrywają: $\overrightarrow{AA} = \mathbf{0}$

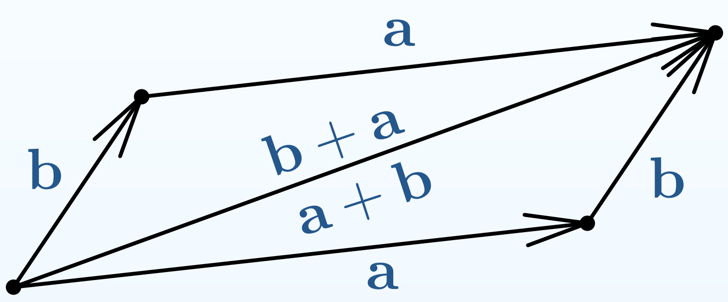
Dodawanie wektorów

- *Sumą* wektorów $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ nazywa się wektor $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, otrymany z tych wektorów bądź równych im wektorów jak na poniższym rysunku

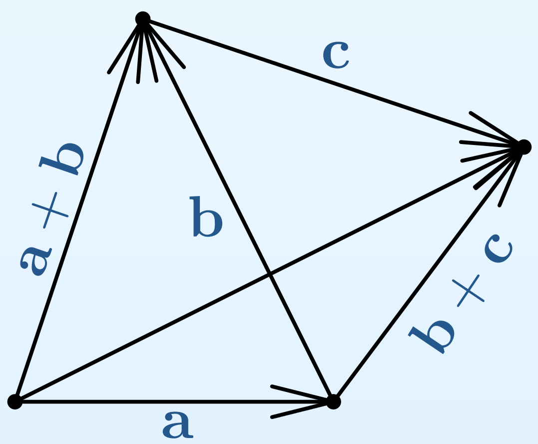


Dodawanie wektorów przemienne i łączne

- $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$

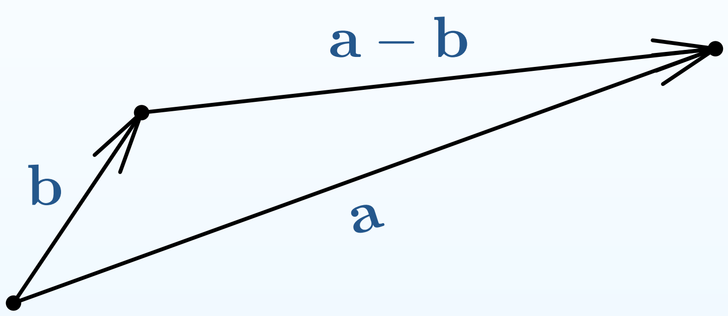


- $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$



Odejmowanie wektorów

- Wektor $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ — jest wektorem, suma którego z b



Nierówność trójkąta

- $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \leqslant |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$
- $|\mathbf{a}+\mathbf{b}+\cdots+\mathbf{c}| \leqslant |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| + \cdots + |\mathbf{c}|$

Mnożenie wektora przez liczbę

- Iloczynem wektora $\mathbf{a}$ i liczby $\lambda \in \mathbb{R}$ jest wektor $\lambda\mathbf{a}$
  - $|\lambda\mathbf{a}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}|$
  - $\lambda\mathbf{a}$ i $\mathbf{a}$ są zgodnie kolinearne, jeżeli $\lambda > 0$ oraz niezgodnie kolinearne, gdy $\lambda < 0$
  - $0 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}$
- $\lambda(\mu\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a}$
- $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$
- $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$

Kombinacje liniowe wektorów

- Niech dany będzie układ wektorów $\{\mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a_k}\}$ oraz wagi (liczby rzeczywiste) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$
- Wektor

$$\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{a_1} + \cdots + \alpha_k \mathbf{a_k}$$

nazywa się *kombinacją liniową* wektorów $\mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a_k}$.

Iloczyn skalarny wektorów

- *Kątem między wektorami* $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ nawyzamy kąt między wektorami $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$, które mają wspólny początek
- Iloczynem skalarnym wektorów $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ jest liczba $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ $(\mathbf{ab})$:
  - $\mathbf{ab} = |a||b| \cos \varphi$ (φ jest kątem międy $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$)
- $\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$
- $\mathbf{a}^2 = \mathbf{aa} = |\mathbf{a}|^2$
- $(\lambda \mathbf{a})\mathbf{b} = \lambda(\mathbf{ab})$
- jeżeli $|e| = 1$, to $(\lambda \mathbf{e})(\lambda \mathbf{e}) = \lambda \mu$
- $\mathbf{ab} = 0 \iff \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ albo jeden z wektorów jest zerowy

Projekcja wektora na prostą

- *Rzut (projekcja)* wektora $\mathbf{a}$ na prostą jest wektor $\bar{\mathbf{a}}$, którego początkiem jest rzut początka wektora $\mathbf{a}$ na prostą, a końcem — rzut końca wektora $\mathbf{a}$ na tę prostą.
- $\mathbf{ab} = \bar{\mathbf{a}}\mathbf{b}$, gdzie $\bar{\mathbf{a}}$ jest rzutem $\mathbf{a}$ na prostą, zawierającą $\mathbf{b}$
- $(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ac} + \mathbf{bc}$
- Jeżeli $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ są trzema niezerowymi wektorami, nie równoległymi jednocześnie jednej płaszczyźnie, to

$$\mathbf{ar} = 0, \mathbf{br} = 0, \mathbf{cr} = 0 \Rightarrow \mathbf{r} = 0$$

Iloczyn wektorowy

- Iloczynem wektorowym wektorów $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ jest wektor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$:
  - $\mathbf{0}$, jeżeli jeden z wektorów jest zerowy lub wektory są równoległe
  - Wpozostałych przypadkach
    - $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ jest prostopadły do płaszczyzny $\mathbf{a}, \mathbf{b}$
    - długość wektora $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ jest równa polu powierzchni równoległoboku wyznaczonego przez wektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}$
    - układ wektorów $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ jest zorientowany dodatnio
- $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$
- $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \theta$, gdzie θ jest kątem między $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$
- $(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$

Projekcja wektora na płaszczyznę

- Rzutem (projekcją) wektora $\mathbf{a}$ na płaszczyznę jest wektor $\mathbf{a}'$, którego początek jest rzutem początka $\mathbf{a}$ na płaszczyznę, a końcem — rzut końca $\mathbf{a}$.
  - Rzutu równych wektorów są równe
  - Rzut sumy wektorów jest sumą rzutów
- Jeżeli wektor $\mathbf{a}'$ jest rzutem $\mathbf{a}$ na płaszczyznę, prostopadłą do $\mathbf{b}$, to $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a}' \times \mathbf{b}$
- $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$
  1. $\mathbf{c} = 0$
  2. $|\mathbf{c}| = 1$
     - Niech $\mathbf{a}'$ oraz $\mathbf{b}'$ będą rzutami odpowiednio $\mathbf{a}$ oraz $\mathbf{b}$ na płaszczyznę, prostopadłą do $\mathbf{c}$. Wtedy mnożenie wektorowe przez $\mathbf{c}$ będzie obrotem o $\frac{\pi}{2}$
- $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 = |a|^2|b|^2 - (|a||b|\cos\theta)^2$, gdzie θ jest kątem między wektorami

Współrzędne wektora względem bazy

- Niech dane będą trzy niezerowe, niekomplanarne wektory $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$. Wtedy każdy wektor $\mathbf{r}$ może zostać jednoznacznie przedstawiony jako suma $\mathbf{r} = r_1\mathbf{e_1} + r_2\mathbf{e_2} + r_3\mathbf{e_3}$
  - Niech $\mathbf{r} = r'_1\mathbf{e_1} + r'_2\mathbf{e_2} + r'_3\mathbf{e_3}$ będzie inną reprezentacją
    1. $\mathbf{r}$ jest równoległy do jednego z wektorów $\mathbf{e}$
    2. $\mathbf{r}$ jest równoległy do płaszczyzny jednej z pary wektorów $\mathbf{e}$
    3. $\mathbf{r}$ nie jest równoległy do żadnej z par wektorów $\mathbf{e}$
- Wektory $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$ nazywane są *bazą* przestrzeni wektorów.
- Liczby r_1, r_2, r_3 nazywane są *współrzędnymi* wektora $\mathbf{r}$ w bazie $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$.

Działania liniowe na wektorach

- Niech dana będzie baza $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$.
  - Niech dane będą dwa wektory: $\mathbf{r}$ o współrzędnych (r_1, r_2, r_3) oraz $\mathbf{r}'$ o współrzędnych (r'_1, r'_2, r'_3).
    - Wtedy wektor $\mathbf{r} \pm \mathbf{r}'$ będzie miał współrzędne $(r_1 \pm r'_1, r_2 \pm r'_2, r_3 \pm r'_3)$.
  - Niech dane będą wektor $\mathbf{r}$ o współrzędnych (r_1, r_2, r_3) oraz liczba $\lambda \in \mathbb{R}$.
    - Wtedy wektor $\lambda\mathbf{r}$ będzie miał współrzędne $(\lambda r_1, \lambda r_2, \lambda r_3)$.

Baza kartezjańska

- Niech dana będzie baza $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — składająca się z wektorów jednosktowych, wzajemnie prostopadłych i zorientowanych dodatnio.
  - Baza $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ nazywa się bazą *kartezjańska*
  - $\mathbf{a} = x_a\mathbf{i} + y_a\mathbf{j} + z_a\mathbf{k} = (\mathbf{ai})\mathbf{i} + (\mathbf{aj})\mathbf{j} + (\mathbf{ak})\mathbf{k}$
  - Liczby $\cos\alpha = \frac{\mathbf{ai}}{|a|}, \cos\beta = \frac{\mathbf{aj}}{|a|}, \cos\gamma = \frac{\mathbf{ak}}{|a|}$ nazywane są *cosinusy kierunkowe*

Działania metryczne w bazie kartezjańskiej

- Niech dana będzie *kartezjańska* baza $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$. Wtedy
  - $\mathbf{ab} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$
  - $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ma współrzędne

$$\begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix}$$

  - $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_a & z_b \end{vmatrix}$

Zmiana bazy

- Niech dane będą dwie bazy: $\mathcal{E} = \{\,\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\,\}$ oraz $\mathcal{F} = \{\,\mathbf{f_1}, \mathbf{f_2}, \mathbf{f_3}\,\}$. Wtedy
  - Wektory $(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})$ mają jednoznaczne rozłożenie po bazie $(\mathbf{f_1}, \mathbf{f_2}, \mathbf{f_3})$: $\begin{cases} \mathbf{e}_1 = a_{11}\mathbf{f_1} + a_{21}\mathbf{f_2} + a_{31}\mathbf{f_3}, \\ \mathbf{e}_2 = a_{12}\mathbf{f_1} + a_{22}\mathbf{f_2} + a_{32}\mathbf{f_3}, \\ \mathbf{e}_2 = a_{13}\mathbf{f_1} + a_{23}\mathbf{f_2} + a_{33}\mathbf{f_3}. \end{cases}$
  - $\begin{pmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f_1} & \mathbf{f_2} & \mathbf{f_3} \end{pmatrix} A$, gdzie A jest macierzą kolumn współrzędnych wektorów $\mathcal{E}$ w bazie $\mathcal{F}$
  - wektor $\mathbf{a}$ w bazie $\mathcal{F}$ będzie miał współrzędne $A \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix}$, gdzie $\begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix}$ — jego współrzędne w $\mathcal{E}$.
  - A nazywa się macierzą przejścia od $\mathcal{E}$ do $\mathcal{F}$ (zmiany bazy)

Zmiana bazy. Uwagi

- $\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \mathbf{f}_3\end{pmatrix} A \iff \begin{pmatrix}\mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \mathbf{f}_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\end{pmatrix} A^{-1}$, gdzie A^{-1} jest macierzą odwrotną.
- Jeżeli obie bazy są kartezjańskie, to macierz przejścia jest *ortogonalna*
  - wektory-kolumny są jednostkowe i wzajemnie prostopadłe
    - to samo dotyczy wierszy
  - dla macierzy ortogonalnych $A^{-1} = A^t$

Przekształcenia liniowe

- Niech dane będą: układ wektorów $\mathcal{E} = \{\, \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3} \,\}$ oraz baza $\mathcal{F} = \{\, \mathbf{f_1}, \mathbf{f_2}, \mathbf{f_3} \,\}$, $\begin{pmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f_1} & \mathbf{f_2} & \mathbf{f_3} \end{pmatrix} A$.
  - *przekształceniem liniowym* nawyza się odwzorowanie
    $$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} \mapsto x_a\mathbf{e_1} + y_a\mathbf{e_2} + z_a\mathbf{e_3}$$
  - współrzędne wektora $\mathbf{a}$ po przekształceniu będą równe
    $$A \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix}$$
  - A nazywa się *macierzą* przekształcenia
  - wynik przekształcenia zapisuje się $A\mathbf{a}$

Przekształcenia liniowe. Uwagi

- macierz A składa się z kolumn — współrzędnych układu $\mathcal{E}$ w bazie $\mathcal{F}$
- macierz A składa się z kolumn — współrzędnych wektorów bazy $\mathcal{F}$ po przekształceniu
- jeżeli macierz A jest odrwacalną, to $\mathcal{E}$ też jest bazą oraz przekształcenie liniowe zgada się z zamianą bazy $\mathcal{E} \to \mathcal{F}$
- przekształcenie $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest liniowym wtedy i tylko wtedy, gdy

  1. dla dowolnych dwóch wektorów $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ spełniono $\phi(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \phi(\mathbf{a}) + \phi(\mathbf{b})$
  2. dla dowolnego wektoru $\mathbf{a}$ oraz dowolnej liczby rzeczywistej λ spełniono $\phi(\lambda\mathbf{a}) = \lambda\phi(\mathbf{a})$

Przekształcenia sztywne

- przekształcenie nazywa się *sztywnym,* jeżeli nie zmienia ono odległości między punktami
  - a więc i kątów między liniami i, na ogół, kształtów obiektów
- macierz przekształcenia sztywnego jest ortogonalna

Obrót

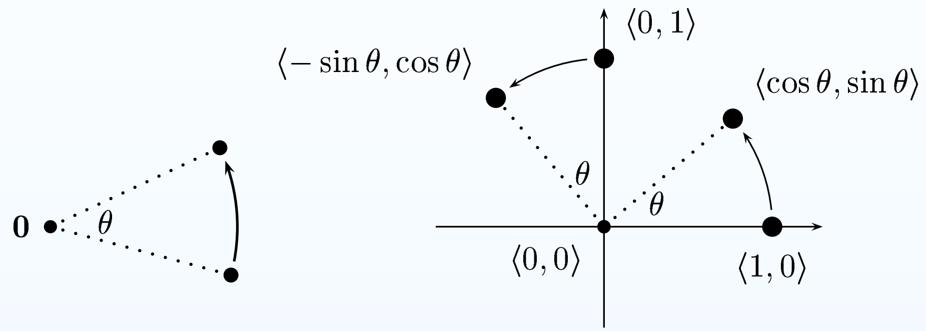


Figure II.5: Effect of a rotation through angle θ. The origin $\mathbf{0}$ is held fixed by the rotation.

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Skalowanie

$$S_{\lambda_1,\lambda_2} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Mnożenie przekształceń

- Niech dane będą dwa przekształcenia liniowe: A oraz B
- Iloczynem (superpozycją) przekształceń $A \circ B$ jest przekształcenie *liniowe* $AB(\mathbf{a}) = A(B\mathbf{a})$
  - Macierzą $A \circ B$ jest macierz AB
    - Dlatego zamiast $A \circ B$ będziemy pisać AB
- Macierzą przekształcenia odwrotnego do A jest macierz A^{-1}

Twierdzenie 1. *Każde przekształcenie liniowe można rozłożyć w iloczyn obrotu oraz skalowania (o różnych współczynnikach)*

Twierdzenie 2. *Każde przekształcenie liniowe* sztywne, *które nie zmienia orientacji, jest obrotem*

Obrót 3D

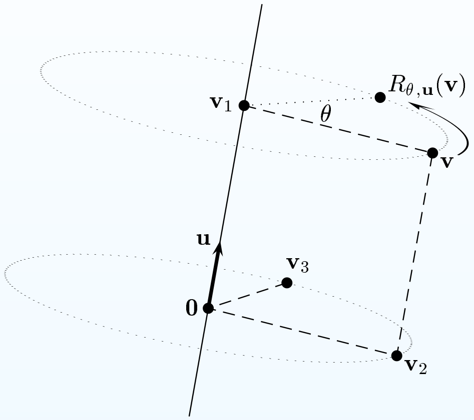


Figure II.14: The vector $\mathbf{v}$ being rotated around $\mathbf{u}$. The vector $\mathbf{v}_1$ is $\mathbf{v}$'s projection onto $\mathbf{u}$. The vector $\mathbf{v}_2$ is the component of $\mathbf{v}$ orthogonal to $\mathbf{u}$. The vector $\mathbf{v}_3$ is $\mathbf{v}_2$ rotated 90° around $\mathbf{u}$. The dashed line segments in the figure all meet at right angles.

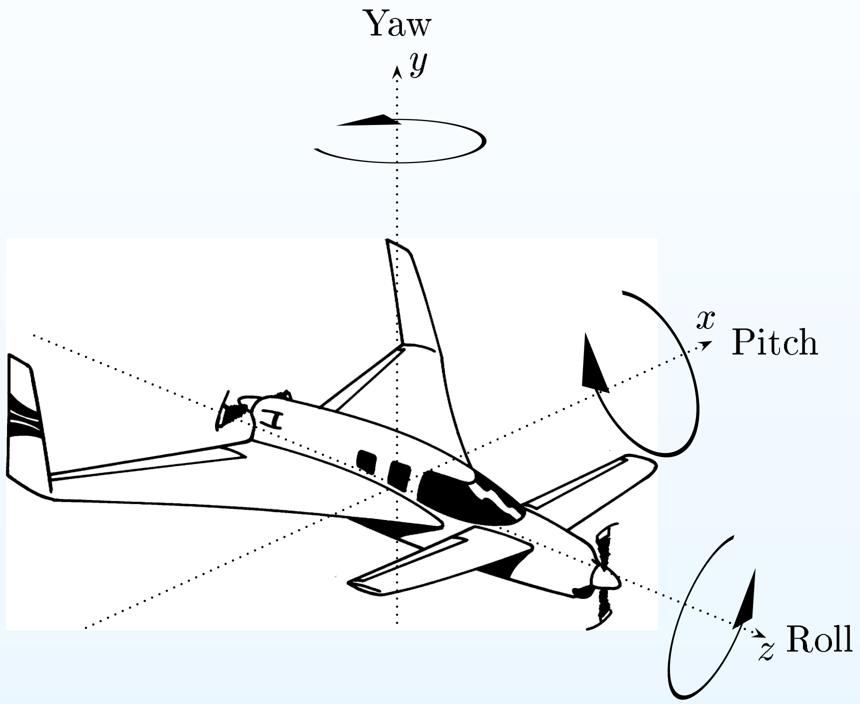
Macierz obrotu 3D

- Obrót dookoła osi wychodzącej z początku układu współrzędnych w kierunku $u = (u_1, u_2, u_3)$ o kąt θ stopni.

$$\begin{pmatrix} (1-c)u_1^2 + c & (1-c)u_1u_2 - su_3 & (1-c)u_1u_3 + su_2 \\ (1-c)u_1u_2 + su_3 & (1-c)u_2^2 + c & (1-c)u_2u_3 - su_1 \\ (1-c)u_1u_3 - su_2 & (1-c)u_2u_3 + su_1 & (1-c)u_3^2 + c \end{pmatrix},$$

gdzie $c = \cos\theta$, $s = \sin\theta$.

Kąty Eulera: odchylenie, pochylenie, przechylenie



- $R = R_{\theta_y, j} R_{\theta_p, i} R_{\theta_r, k}$

Macierze obrotów Eulera

- $R_{\theta_p,i}$
- $R_{\theta_y,j}$
- $R_{\theta_r,k}$

Skalowanie 3D

$$S_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Przekształcenia liniowe. Zmiana bazy

- Niech dane będą dwie bazy: $\mathcal{E} = \{\, \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3} \,\}$ oraz $\mathcal{F} = \{\, \mathbf{f_1}, \mathbf{f_2}, \mathbf{f_3} \,\}$, $\begin{pmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f_1} & \mathbf{f_2} & \mathbf{f_3} \end{pmatrix} T$
- Niech przekształcenie liniowe będzie dane w bazie $\mathcal{E}$ macierzą A
- Wtedy w bazie $\mathcal{F}$ to przekształcenie dane będzie macierzą TAT^{-1}

Przykład. Skalowanie wzdłuż przekątnej

- Macierz skalowania na płaszczyźnie ze współczynnikiem 2 wzdłuż przekątnej

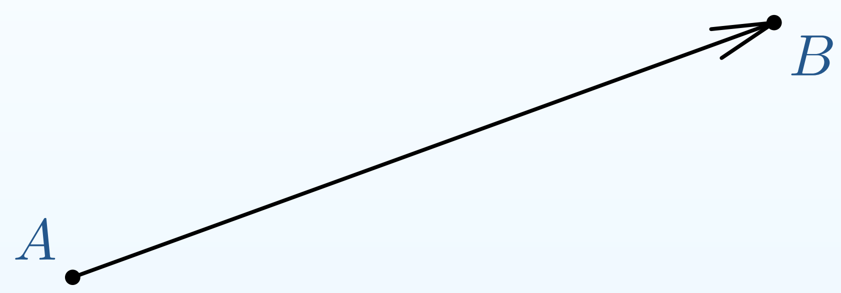
Przykład. Skalowanie wzdłuż przekątnej

- Macierz skalowania na płaszczyźnie ze współczynnikiem 2 wzdłuż przekątnej
- $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

Przestrzeń afiniczna $\mathbb{R}^3$

Odejmowanie punktów

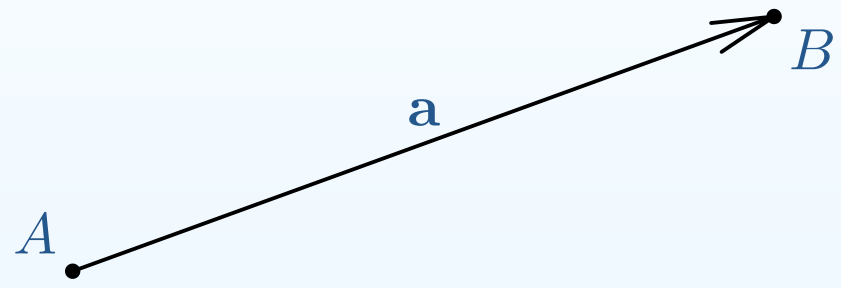
- *Różnicą* punktów B i A jest wektor $\overrightarrow{AB}$.



- $B - A = \overrightarrow{AB}$
- $A = B \iff B - A = \mathbf{0}$
- $(B - A) + (C - B) = (C - A) = \overrightarrow{AC}$

Dodanie do punktu wektora

- Sumą punktu A oraz wektora $\mathbf{a}$ jest punkt B, który zgadza się z końcem wektora $\mathbf{a}$, jeżeli początek tego wektora umieścić w A.



- $B = A + \overrightarrow{AB}$
- $(A + \mathbf{a_1}) + \mathbf{a_2} = A + (\mathbf{a_1} + \mathbf{a_2})$
- Dodanie wektora nazywa się *przesunięciem róznoległym*

Kombinacja afiniczna punktów

- Niech dany będzie układ punktów $\{ A_1, \ldots, A_k \}$ oraz wagi (liczby rzeczywiste) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, takie że $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 1$
- Ustalmy dowolny punkt O
- *Kombinacją afiniczną* punkitów $\alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_k A_k$ jest punkt $O + \alpha_1 \overrightarrow{OA_1} + \cdots + \alpha_k \overrightarrow{OA_k}$

Twierdzenie 3. *Kombinacja afiniczna punktów nie zależy od wyboru punktu O*

Układ współrzędnych

- Wybierzmy dowolny punkt O, *początek układu*
- Przez ten punkt poprowadźmy trzy niekomplanarne proste: Ox, Oy, Oz, *osie współrzędnych*
- Płaszczyzny współrzędnych Oxy, Oxz, Oyz
- Na osiach wyznaczymy niezerowe wektory: odpowiednio $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$ —*bazę*.
- Dla każdego punktu A wektor $\overrightarrow{OA}$ ma jednoznaczne przedstawienie $\overrightarrow{OX} = x\mathbf{e_1} + y\mathbf{e_2} + z\mathbf{e_3}$
  - liczby x, y, z — *współrzędne* punktu A
- układ jest *prawym (dodatnim),* jeżeli $\{\, \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3} \,\}$ jest zorientoany dodatnio
- układ jest *lewym (ujemnym),* jeżeli $\{\, \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3} \,\}$ jest zorientowany ujemnie
- kierunki na osiach, zorientowane zgodnie z wektorami bazy, nazywają się *dodatnimi*. Kierunki przeciwne — *ujemnymi*

Układ współrzędnych kartezjańskich

- Układ współrzędnych nazywa się *kartezjańskim, jeżeli*
  - osie są wzajemnie prostopadłe
  - wektory $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$ są jednostkowe (mają jednostkową długość).
- Dalej w prezentacji prawie zawsze układ będzie prawym kartezjańskim układem
- Dla wektorów bazy układu kartezjańskiego czasami stosuje się oznaczenia $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$

Działania na punktach w układzie współrzędnych

- Odejmowanie punktów:
  - $$A_2 - A_1 = \overrightarrow{A_1A_2} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$$
- Dodanie wektora:
  - $$A_1 + \mathbf{a} = \begin{pmatrix} x_1 + x_a \\ y_1 + y_a \\ z_1 + z_a \end{pmatrix}$$
- Kombinacja afiniczna:
  - $$\alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_k A_k = \begin{pmatrix} \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k \\ \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_k y_k \\ \alpha_1 z_1 + \cdots + \alpha_k z_k \end{pmatrix}$$
- wzory są prawidłowe w każdym układzie

Podział odcinka w danym stosunku

- Dane są dwa punkty $A_1(x_1, y_1, z_1)$ oraz $A_2(x_2, y_2, z_2)$
- Znaleźć punkt $A(x, y, z)$, który dzieli odcinek A_1A_2 w stosunku $\lambda_1 : \lambda_2$
  - $\lambda_2 \overrightarrow{A_1A} - \lambda_1 \overrightarrow{AA_2} = 0$
  - $\overrightarrow{OA} = \frac{\lambda_2 \overrightarrow{OA_1} + \lambda_1 \overrightarrow{OA_2}}{\lambda_1 + \lambda_2}$
  - $x = \frac{\lambda_2 x_1 + \lambda_1 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$, $y = \frac{\lambda_2 y_1 + \lambda_1 y_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$, $z = \frac{\lambda_2 z_1 + \lambda_1 z_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$.
- wzory są prawidłowe w każdym układzie

Odległość między punktami

- Dane są dwa punkty $A_1(x_1, y_1, z_1)$ oraz $A_2(x_2, y_2, z_2)$
  - $|A_1A_2|^2 = \overrightarrow{A_1A_2}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$
- wzory są prawidłowe tylko w układzie kartezjańskim

Zmiana układu współrzędnych

- Niech dane będą dwa ogólne układy współrzędnych: $(O, \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})$ oraz $(O', \mathbf{f_1}, \mathbf{f_2}, \mathbf{f_3})$
- Punkt P ma współrzędne (x, y, z) względem jednego układu oraz (z', y', z') względem drugiego.
- Wektory $(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})$ mają jednoznaczne rozłożenie po bazie $(\mathbf{f_1}, \mathbf{f_2}, \mathbf{f_3})$: $\begin{cases} \mathbf{e}_1 = a_{11}\mathbf{f_1} + a_{21}\mathbf{f_2} + a_{31}\mathbf{f_3}, \\ \mathbf{e}_2 = a_{12}\mathbf{f_1} + a_{22}\mathbf{f_2} + a_{32}\mathbf{f_3}, \\ \mathbf{e}_2 = a_{13}\mathbf{f_1} + a_{23}\mathbf{f_2} + a_{33}\mathbf{f_3}. \end{cases}$
  - $\begin{pmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f_1} & \mathbf{f_2} & \mathbf{f_3} \end{pmatrix} A$
- Punkt O w nowym układzie ma współrzędne (x_0, y_0, z_0).
- Wówczas $\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + x_0, \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + y_0, \\ z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + z_0. \end{cases}$
- $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}.$

Przekształcenia afiniczne

- Niech dany będzie układ współrzędnych $O, \mathbf{f_1}, \mathbf{f_2}, \mathbf{f_3}$ oraz punkt O' i układ wektorów $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}$
  - *przekwsztatceniem afinicznym* nawyza się odwzorowanie
  $$P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto O' + x\mathbf{e_1} + y\mathbf{e_2} + z\mathbf{e_3}$$
  - współrzędne punktu A po przekształceniu będą równe
  $$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$, gdzie
    - $\begin{pmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f_1} & \mathbf{f_2} & \mathbf{f_3} \end{pmatrix} A$
    - (x_0, y_0, z_0) — współrzędne wektora $\overrightarrow{OO'}$

Uwagi

- Jeżeli układ wektorów $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}$ jest bazą, to przekształcenie afiniczne zgadza się z zamianą układu współrzędnych
- Przekwsztatcenie afiniczne B składa się z przekształcenia linowego A i przesunięcia równoległego T_u, $B = T_u \circ A$
  - Wówczas przesunięcie T_u oraz przekształcenie liniowe A określone są jednoznacznie.

Twierdzenie 4. *Każde przekształcenie afiniczne można rozłożyć w iloczyn obrotu, skalowania (o różnych współczynnikach) oraz przesunięcia równoległego*

Twierdzenie 5. *Każde przekształcenie afiniczne* sztywne, *które nie zmienia orientacji, jest obrotem (afnicznym) lub przesunięciem równoległym*

Współrzędne jednorodne w $\mathbb{R}^2$

- Trójka liczb $x, y, w \in \mathbb{R}$ ($w \neq 0$) reprezentuje punkt o współrzędnych $(x/w, y/w) \in \mathbb{R}^2$.
- $(2, 1) \sim (2 : 1 : 1) \sim (6 : 3 : 3) \sim (-2 : -1 : -1)$

Współrzędne jednorodne w $\mathbb{R}^3$

- Czwórka liczb $x, y, z, w \in \mathbb{R}$ $(w \neq 0)$ reprezentuje punkt o współrzędnych $(x/w, y/w, z/w) \in \mathbb{R}^3$.
- $(2, 1, 1) \sim (2 : 1 : 1 : 1) \sim (6 : 3 : 3 : 3) \sim (-2 : -1 : -1 : -1)$

Macierz przekształcenia afinicznego w $\mathbb{R}^2$

- Niech $B = T_u \circ A$ będzie przekształceniem afinicznym,
$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$
- Macierzą przekształcenia B nazywa się macerz
$$M_B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & u_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
- $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & u_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + u_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + u_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Obrót

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Skalowanie

$$S_{\lambda_1,\lambda_2} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Przesunięcie równoległe

$$T_{u_1,u_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_1 \\ 0 & 1 & u_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Macierz przekształcenia afinicznego w $\mathbb{R}^3$

- $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
- $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + u_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + u_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + u_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Przesunięcie równoległe

- Przesunięcie o wektor $u = (u_1, u_2, u_3)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & u_1 \\ 0 & 1 & 0 & u_2 \\ 0 & 0 & 1 & u_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Obrót

- Obrót dookoła osi wychodzącej z początku układu współrzędnych w kierunku $u = (u_1, u_2, u_3)$ o kąt θ stopni. Kierunek obrotu określany jest orientacją.

$$\begin{pmatrix} (1-c)u_1^2+c & (1-c)u_1u_2-su_3 & (1-c)u_1u_3+su_2 & 0 \\ (1-c)u_1u_2+su_3 & (1-c)u_2^2+c & (1-c)u_2u_3-su_1 & 0 \\ (1-c)u_1u_3-su_2 & (1-c)u_2u_3+su_1 & (1-c)u_3^2+c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

gdzie $c = \cos\theta$, $s = \sin\theta$.

Skalowanie

- $\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ — symetria względem płaszczyzny $y - z$.

Jednorodność macierzy przekształcenia afinicznego

- Macierze A oraz λA określają to samo przekształcenie afiniczne.

Macierz superpozycji przekształceń

- Niech dane będą dwa przekształcenia afiniczne: A oraz B
- iloczynem (superpozycją) przekształceń $A \circ B$ jest przekształcenie *afiniczne* $AB(\mathbf{a}) = A(B\mathbf{a})$
  - Macierzą $A \circ B$ jest macierz AB
    - Dlatego zamiast $A \circ B$ będziemy pisać AB
- Macierzą przekształcenia odwrotnego do A jest macierz A^{-1}

Macierz zmiany układu współrzędnych

- Niech dane będą dwa układy współrzędnych: $\mathcal{E} = \{\mathcal{O}, (\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})\}$ oraz $\mathcal{F} = \{\mathcal{O}', (\mathbf{f_1}, \mathbf{f_2}, \mathbf{f_3})\}$
- Punkt P ma współrzędne (x, y, z) względem układu $\mathcal{E}$ oraz (z', y', z') względem $\mathcal{F}$.
- $\begin{pmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f_1} & \mathbf{f_2} & \mathbf{f_3} \end{pmatrix} A$
- Punkt O w nowym układzie ma współrzędne (x_0, y_0, z_0).
- $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$
- Macerz przejścia of $\mathcal{E}$ do $\mathcal{F}$ (zmiany układu wszpółrzędnych)
$$T = \begin{pmatrix} & & & x_0 \\ & A & & y_0 \\ & & & z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$
- Wszystkie uwagi dotyczące macierzy przekształceń

Przekształcenia afiniczne. Zmiana układu współrzędnych

- Niech dane będą dwa układy współrzędnych: $\mathcal{E} = (\mathcal{O}, \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})$ oraz $\mathcal{F} = (\mathcal{O}', \mathbf{f_1}, \mathbf{f_2}, \mathbf{f_3})$
- Niech T będzie macierzą przejścia od $\mathcal{E}$ do $\mathcal{F}$.
- Niech przekształcenie afiniczne będzie w układzie $\mathcal{E}$ miało macierz A
- Wtedy w układzie $\mathcal{F}$ to przekształcenie będzie miało macierz TAT^{-1}

Przykład. Obrót afiniczny

- Obrót na płaszczyźnie o 90° dookoła punktu $(1, 2)$

Przykład. Obrót afiniczny

- Obrót na płaszczyźnie o 90° dookoła punktu $(1, 2)$
- $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Teoria transponowana

- Wektory i punkty są zapisywane jako wiersze $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$, $P = (x : y : x : w)$
- Mnożenie przez macierz przekształcenia po prawej stronie $\begin{pmatrix} v_x & v_y & v_z \end{pmatrix} M$, $\begin{pmatrix} x & y & z & w \end{pmatrix} A$
- Macierze są zamieniane na transponowane:
  - przesunięcie o wektor $u = (u_1, u_2, u_3)$:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 1 \end{pmatrix},$$
    etc
- Mnożenie macierzy w innej kolejności
  - Macierzą $A_1 \circ A_2$ będzie $A_2 A_1$

Przestrzeń rzutowa $\mathbb{RP}^3{}^\star$

Przestrzeń rzutowa

- Składa się z czwórek współrzędnych $(x : y : z : w)$ — współrzędnych jednorodnych
  - w może być zerem
- Dwie proporcjonalne czwórki reprezentują ten sam punkt:

$$(x_1 : y_1 : z_1 : w_1) \sim (x_2 : y_2 : z_2 : w_2) \iff \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{w_1}{w_2}$$

Przekształcenia rzutowe

- Przekształceniem rzutowym (projektywicznym) nazywa się przekształcenie

$$\mathbb{RP}^3 \longrightarrow \mathbb{RP}^3$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \longmapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix},$$

gdzie A jest dowolną 4×4 macierzą, przy czym $\det A \neq 0$