

Modelowanie i wizualizowanie 3W-grafiki

Sprawdzenie przecięcia

Alexander Denisjuk

`denisjuk@matman.uwm.edu.pl`

Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie

Wydział Matematyki i Informatyki

ul. Żołnierska 14

10-561 Olsztyn

Sprawdzenie przecięcia

Najnowsza wersja tego dokumentu dostępna jest pod adresem

<http://matman.uwm.edu.pl/~denisjuk/>

Wymagania na algorytm

- ⑥ dokładność i pewność: artefakty
- ⑥ prędkość: czas obliczeń

Promień i sfera

- promień $\{ p + \alpha u, \alpha \geq 0 \}$
- sfera $\{ x \mid \|x - c\| = r \} \subset \mathbb{R}^3$
- najbliższy punkt q

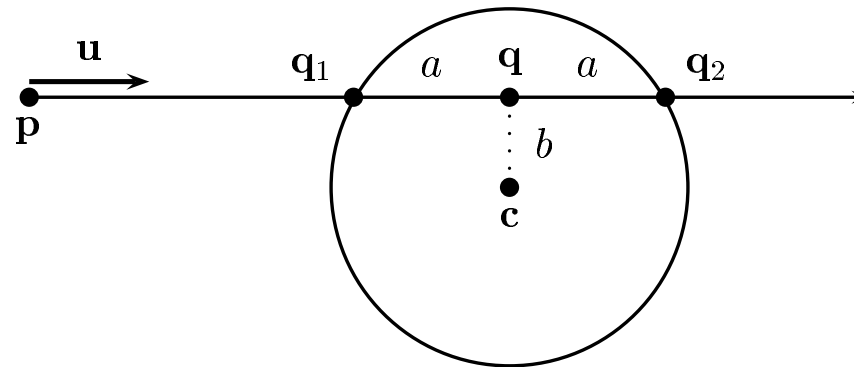


Figure X.1: The ray from p in direction u reaches its closest point to the center c of the sphere at q . The points q_1 and q_2 are the two places where the line intersects the sphere.

Najbliższy punkt q

- ⑥ $\alpha = -(p - c) \cdot u$
- ⑥ $q = p - ((p - c) \cdot u)u$
- ⑥ $b = \|q - c\| \leq r? \quad a = \sqrt{r^2 - b^2}$
- ⑥ $q_1 = p + (\alpha - a)u, q_2 = p + (\alpha + a)u$

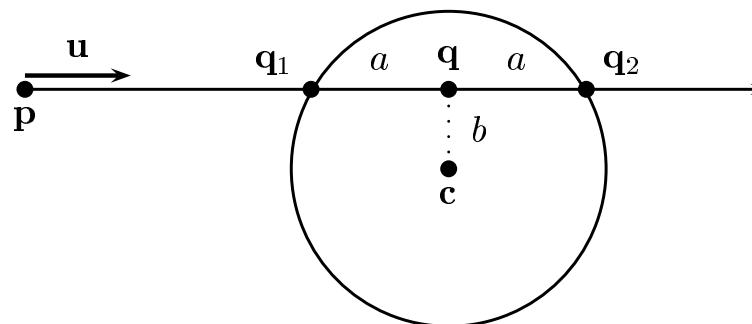


Figure X.1: The ray from p in direction u reaches its closest point to the center c of the sphere at q . The points q_1 and q_2 are the two places where the line intersects the sphere.

Przecięcie promienia i sfery

Dane: p i u określa promień, $\|u\| = 1$. Sfera określona przez środek c i promień r

$$\alpha = -(p - c) \cdot u;$$

$$q = p + \alpha u;$$

$$bSq = \|q - c\|^2;$$

if $bSq > r^2$ **then**

return brak przecięcia

end if

Przecięcie promienia i sfery



$$q = \sqrt{r^2 - bSq};$$

if $\alpha \geq a$ **then**

$$q_1 = q - au;$$

return q_1 ;

end if

if $\alpha + a \geq 0$ **then**

$$q_2 = q + au;$$

return q_2 ;

end if

return brak przecięcia

Przecięcie promienia i sfery



- ⑥ jeżeli początek promienia jest poza sferą
- ⑥ sfera graniczna

Przecięcie promienia i płaszczyzny

- ⑥ płaszczyzna $\{ x | x \cdot n = d \}$
- ⑥ punkt q

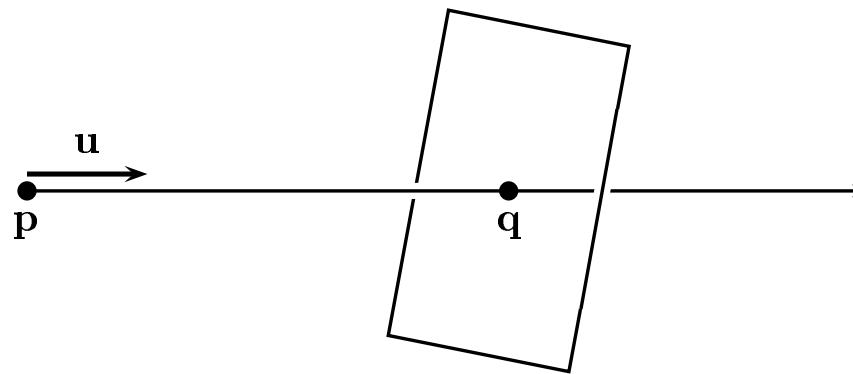


Figure X.2: The ray specified by its start position \mathbf{p} and direction \mathbf{u} intersects the plane at the point \mathbf{q} .

Punkt q

$$\textcircled{6} \quad d = q \cdot n = p \cdot n + \alpha u \cdot n$$

$$\textcircled{6} \quad \alpha = \frac{d - p \cdot n}{u \cdot n}$$

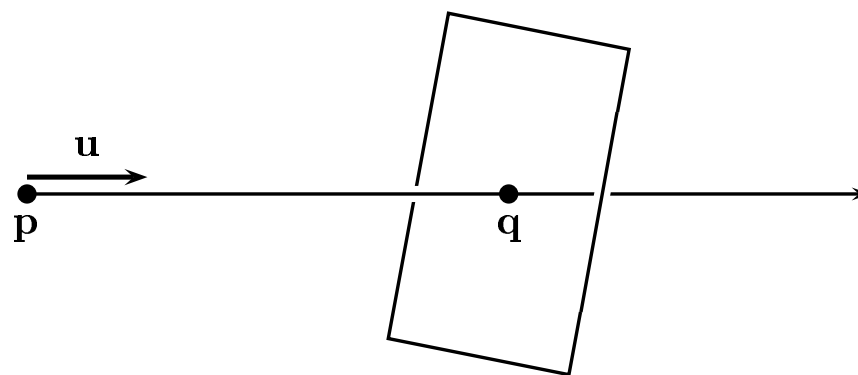


Figure X.2: The ray specified by its start position p and direction u intersects the plane at the point q .

Przecięcie promienia i płaszczyzny

Dane: p i u określa promień, $\|u\| = 1$. Płaszczyzna określona jest przez n i d

$$c = u \cdot n;$$

if $c == 0$ **then**

return brak przecięcia (równonległe)

end if

$$\alpha = (d - p \cdot n) / c;$$

if $\alpha < 0$ **then**

$$q_1 = q - \alpha u;$$

return brak przecięcia;

end if

$$q = p + \alpha u;$$

return q ;

Przecięcie prostej i płaszczyzny

Dane: p i u określa prostą, $\|u\| = 1$. Płaszczyzna określona jest przez n i d

$$c = u \cdot n;$$

if $c == 0$ **then**

return brak przecięcia (równonległe)

end if

$$\alpha = (d - p \cdot n) / c;$$

$$q = p + \alpha u;$$

return q ;

Przecięcie promienia i trójkąta

- ⑥ promień $\{ p + \alpha u, \alpha \geq 0 \}$
- ⑥ trójkąt —wierzchołki v_0, v_1, v_2 (nie kolinearne)
- ⑥ krok pierwszy — przecięcie z płaszczną, punkt q

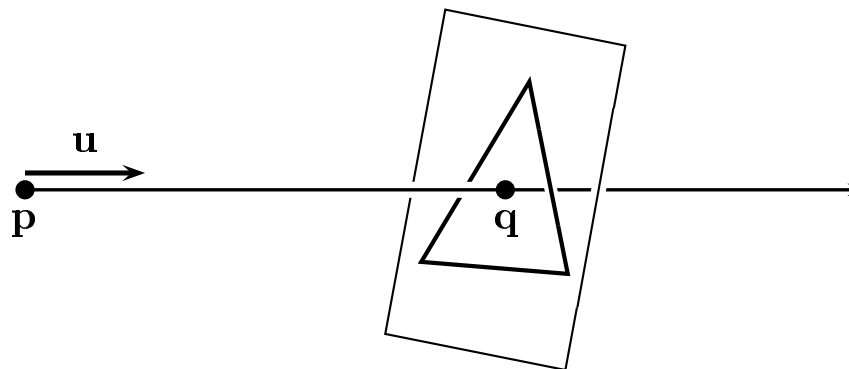


Figure X.3: Intersecting a ray with a triangle. The first step is to find the intersection q with the plane containing the triangle.

Przecięcie promienia i trójkąta

- ⑥ $n = (v_1 - v_0) \times (v_2 - v_0)$
- ⑥ $d = n \cdot v_0$
- ⑥ współrzędne barycentryczne

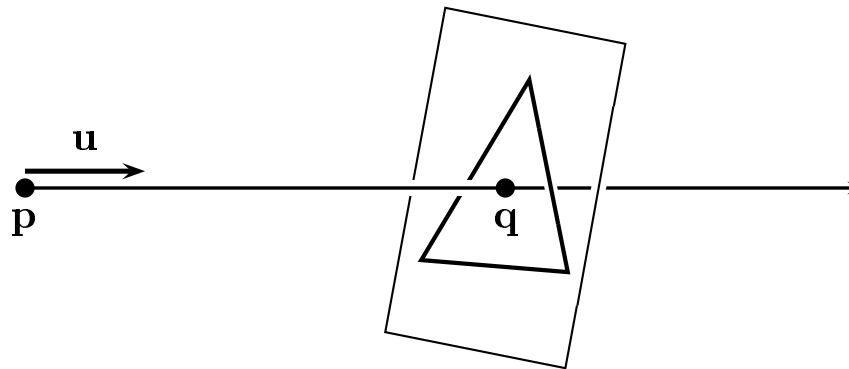


Figure X.3: Intersecting a ray with a triangle. The first step is to find the intersection q with the plane containing the triangle.

Współrzędne barycentryczne

- ⑥ $e_1 = v_1 - v - 0, e_2 = v_2 - v - 0$
- ⑥ $a = e_1^2, b = e_1 \cdot e_2, c = e_2^2$
- ⑥ $D = ac - b^2, A = a/D, B = b/D, C = c/D$
- ⑥ $u_\beta = Ce_1 - Be_2, u_\gamma = Ae_2 - Be_1$
- ⑥ $\beta = u_\beta \cdot (q - v_0), \gamma = u_\gamma \cdot (q - v_0), \alpha = 1 - \beta - \gamma$
- ⑥ $q = \alpha v_0 + \beta v_1 + \gamma v_2$

Przecięcie promienia i trójkąta

Dane: p i u określa prostą, $\|u\| = 1$. Wierzchołki v_0 , v_1 i v_2 określają trójkąt.

{Obliczenie n , d , u_β i u_γ }

$$e_1 = v_1 - v - 0; e_2 = v_2 - v - 0;$$

$$n = e_1 \times e_2; d = n \cdot v_0;$$

$$a = e_1^2; b = e_1 \cdot e_2; c = e_2^2;$$

$$D = ac - b^2; A = a/D; B = b/D; C = c/D;$$

$$u_\beta = Ce_1 - Be_2; u_\gamma = Ae_2 - Be_1;$$

{Algorytm główny}


Oblicz q

if q nie istnieje **then**

 return brak przecięcia

end if

Przecięcie promienia i trójkąta



```
 $r = q - v_0;$   
 $\beta = u_\beta \cdot r;$   
if  $\beta < 0$  then  
    return brak przecięcia  
end if  
 $\gamma = u_\gamma \cdot r;$   
if  $\gamma < 0$  then  
    return brak przecięcia  
end if  
 $\alpha = 1 - \beta - \gamma;$   
if  $\alpha < 0$  then  
    return brak przecięcia  
end if  
return q;
```

Promień a wypukły wielościan

- ⑥ promień $\{ p + \alpha u, \alpha \geq 0 \}$
- ⑥ wielościan — ograniczony płaszczyznami
 $x \cdot n_i \leq d_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, k$
- ⑥ obliczamy q_i i α_i — przecięcie linii promienia z każdą płaszczyzną
- ⑥ obliczamy z której strony linia przecina płaszczyznę:
 - △ $u \cdot n_i < 0$ od przodu
 - △ $u \cdot n_i > 0$ od tyłu
 - △ $u \cdot n_i = 0$ & $p \cdot n_i \leq d_i$ równoległe od przodu
($\alpha_i = -\infty$)
 - △ $u \cdot n_i = 0$ & $p \cdot n_i \leq d_i$ równoległe od tyłu ($\alpha_i = -\infty$)

Promień a wypukły wielościan

Twierdzenie 1. Niech q_i i α_i będą obliczone dla każdej płaszczyzny, $p(\beta) = p + \beta u$. Wtedy

- ⑥ Jeżeli przecięcie z płaszczyzną i jest od przodu, to $p(\beta)$ należy do półprzestrzeni, ograniczonej płaszczyzną i wtedy i tylko wtedy, kiedy $\beta \geq \alpha_i$.
- ⑥ Jeżeli przecięcie z płaszczyzną i jest od tyłu, to $p(\beta)$ należy do półprzestrzeni, ograniczonej płaszczyzną i wtedy i tylko wtedy, kiedy $\beta \leq \alpha_i$.

- ⑥ $f_{\max} = \max\{\alpha_i | \text{przecięcie } i \text{ jest od przodu}\}$
- ⑥ $b_{\min} = \min\{\alpha_i | \text{przecięcie } i \text{ jest od tyłu}\}$
- ⑥ linia przecina wielościan wtedy i tylko wtedy, gdy $f_{\max} \leq b_{\min}$
 - △ jeżeli $f_{\max} \geq 0$, to promień wchodzi w wielościan w punkcie $p(f_{\max})$,
 - △ jeżeli $f_{\max} < 0 \leq b_{\min}$, to punkt p jest wewnątrz wielościanu i promień przecina granicę w punkcie $p(b_{\min})$,
 - △ jeżeli $b_{\min} < 0$, lub $b_{\min} < f_{\max}$, to promień nie przecina granicy wielościanu.

Promień a wypukły wielościan

```
// p i u określa prostą,  $\|u\| = 1$ . Wielościan
// jest określony wektorami normalnymi  $n_i$ 
// oraz stałymi  $d_i$ ,  $i = 0, \dots, k$ .
 $f_{\max} = -\infty$ ;  $b_{\min} = +\infty$ ;
for ( $i = 0$ ,  $i \leq k$ ;  $i++$ ) {
     $s = u \cdot n_i$ ;
    if ( $s == 0$ ) { // równoległe
         $p \cdot n_i > d_i$ ;
        return brak przecięcia;
    }
    else next  $i$ 
```

Promień a wypukły wielościan

```
// nie równoległe
 $\alpha = (d_i - p \cdot n_i) / s;$ 
if ( $u \cdot n_i < 0$ ) { // od przodu
    if ( $\alpha > f_{\max}$ ) {
        if ( $\alpha > b_{\min}$ ) {
            return brak przecięcia
        }
         $f_{\max} = \alpha$ 
    }
}
```

Promień a wypukły wielościan

```
else{ //od tyłu
    if ( $\alpha < b_{\min}$  ){
        if ( $\alpha < 0$  ||  $\alpha > b_{\min}$  ){
            return brak przecięcia
        }
         $b_{\min} = \alpha$ 
    }
}
```

Promień a wypukły wielościan

```
} // koniec pętli po i
if ( $f_{\max} > 0$ ) {
     $\alpha = f_{\max}$ 
}
else {
     $\alpha = b_{\min}$ 
}
return  $q = p + \alpha u$ 
```


Promień a walec

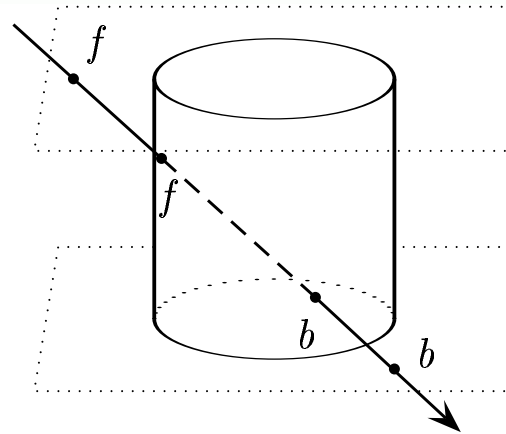


Figure X.5: A cylinder is the intersection of an infinite cylinder and the area between two parallel planes. The ray is shown hitting the top plane, then entering the (infinite) cylinder, then exiting the cylinder, and finally hitting the bottom plane. All the front intersections come before all the back intersections, so the ray does intersect the cylinder.

Promień a powierzchnia stopnia drugiego



$$\begin{aligned} f(x, y, z) = & \\ & = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + \\ & \quad + Gx + Hy + Jz + K = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

$$f(p(u)) = au^2 + bu + c$$

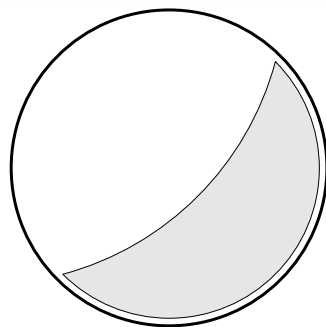
Promień a powierzchnia Béziera

Metody Newtona

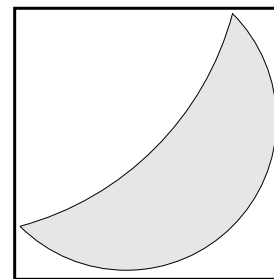
$$\|q(u, v) - p + \alpha u\| = 0$$

Recursive subdivision

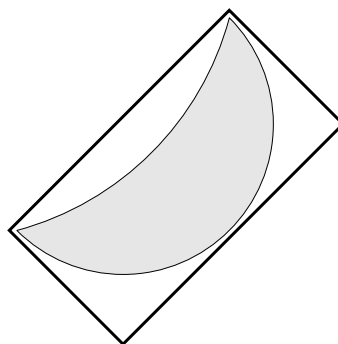
Zmniejszenie testów



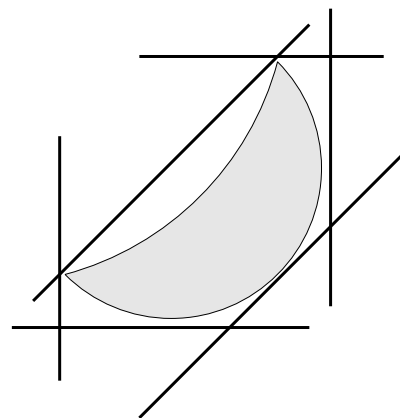
(a)



(b)



(c)



(d)

Figure X.6: Various kinds of two dimensional bounding volumes enclosing a crescent shape. (a) is a bounding sphere. (b) is an axis aligned bounded box (AABB). (c) is an oriented bounding box (OBB). (d) is a discrete oriented polygon (k -DOP) with $k = 3$.

Room- (cell-)based



Quadtree (Octtree)

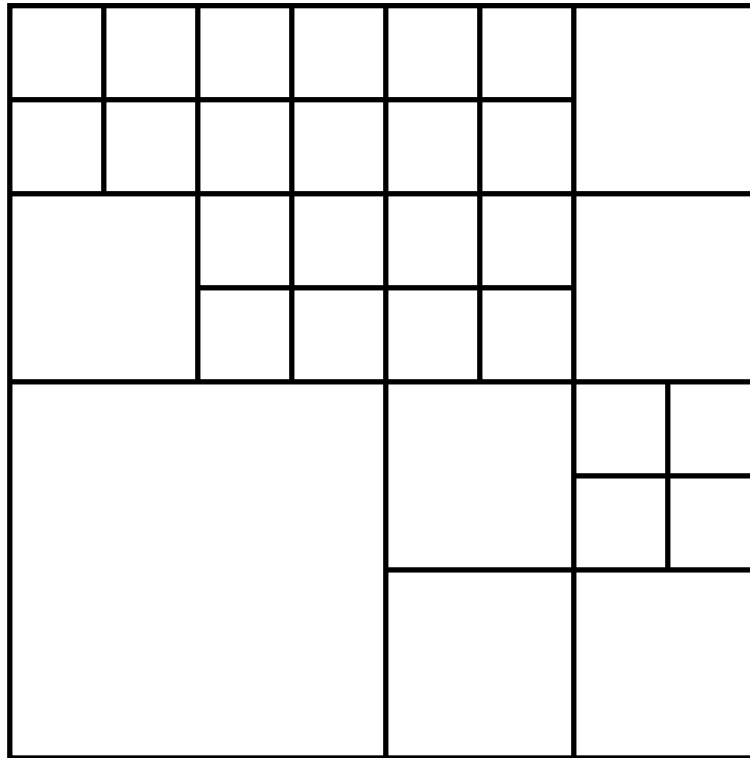


Figure X.7: A quadtree.

k-d tree

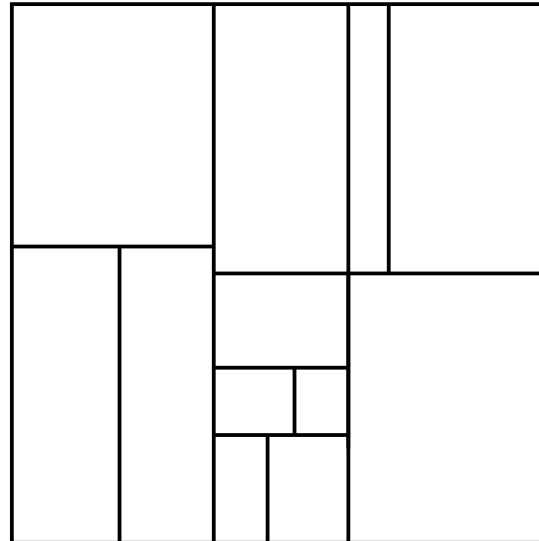


Figure X.8: A k -d tree in two dimensions. A region in a k -d tree can be subdivided by either a vertical or a horizontal line.

BSP tree

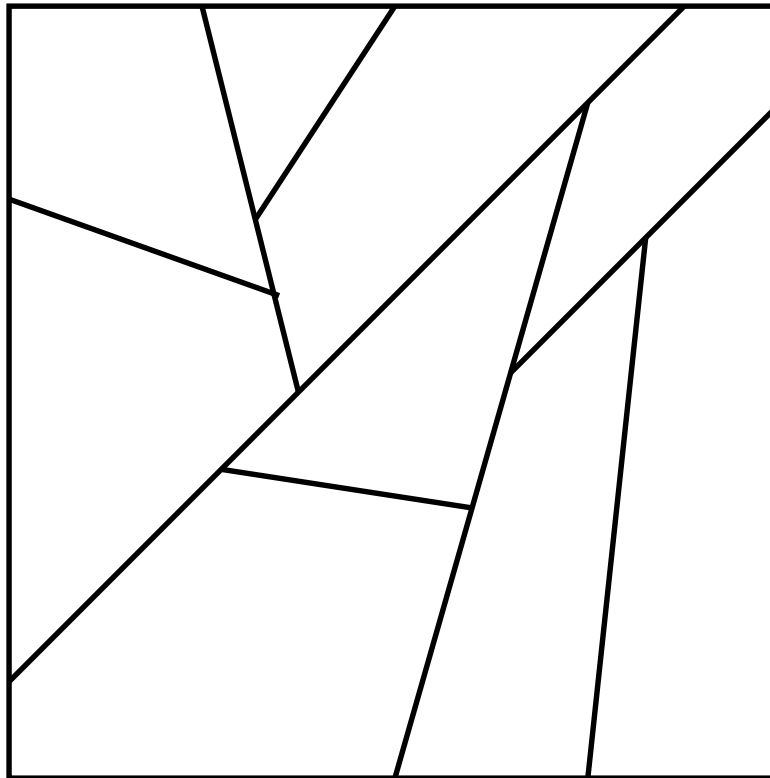


Figure X.9: A BSP tree in two dimensions.

Metody złożone

